

Notes du cours PO-14502
Systeme GPS et relativité
2014-2015

B. Ischi

(MaTeX - <http://www.mathex.net>)

COLLÈGE DE CANDOLLE

Table des matières

Chapitre 1. GPS	3
1. Introduction	4
2. Calcul de la position du récepteur	4
3. Les trois segments	7
4. Les horloges atomiques	8
5. Le temps GPS, le TAI et l'UTC	18
6. Les corrections relativistes	23
Chapitre 2. Relativité restreinte	25
1. Vitesse de la lumière	25
2. Dilatation du temps et contraction des longueurs	33
3. Le cas des satellites GPS	35
4. Transformations de Lorentz	39
5. Contraction des longueurs, addition des vitesses, temps propre, effet Doppler	48
Chapitre 3. Relativité générale	55
1. Introduction	55
2. Le principe d'équivalence faible	55
3. Le principe d'équivalence	58
4. Décalage vers le rouge	58
5. Exemples	60
6. Vérifications expérimentales de l'effet Einstein	62
Chapitre 4. Equations de Maxwell	63
1. Champs électrique et magnétique	63
2. Champ électrique	63
3. Champ magnétique	64
4. Densités de charge et de courant	64
5. Equations de Maxwell	65
6. Formules d'Ostrogradsky et Stokes	66
7. Interprétation des équations de Maxwell: électrostatique	68
8. Equation de Maxwell M1	68
9. Interprétation des équations de Maxwell: électromagnétisme	70
10. Equation de Maxwell M2	70
11. Equation de Maxwell M4	70
12. Force de Laplace	72
13. Equation de Maxwell M3	73
14. Applications de l'induction	76
15. Equations d'onde	77

Appendice A. Fonctions à plusieurs variables	79
1. Dérivées partielles	79
2. Gradient	80
3. Intégrale curviligne	81
4. Généralisations du théorème fondamental du calcul différentiel	83

CHAPITRE 1

GPS

Ces notes ont été rédigées pour un cours de formation continue intitulé “GPS et relativité” destiné aux enseignants en mathématiques et en physique (cours PO-14502, vendredi 17 avril 2015 reporté au 22 avril 2016, cours PO-15502). Elles sont largement inspirées des livres

- “De la relativité au GPS” de Pierre Spagnou (Ellipses, 2012)
- “Combien dure une seconde ?” de Tony Jones (EDP Sciences, 2003)

Le système GPS permet à ses utilisateurs de connaître leur position à quelques mètres près, plus ou moins n’importe où sur la Terre. Il fonctionne grâce à un réseau de satellites équipés de montres toutes synchronisées. Au moins une fois par jour, chaque satellite est remis à l’heure par une station de contrôle au sol. Chaque satellite transmet en permanence sa position et son heure. L’utilisateur est équipé d’un récepteur GPS qui calcule sa position grâce aux signaux reçus par au moins quatre satellites. Ce calcul est basé sur le fait que la lumière (les ondes électromagnétiques transmises par les satellites) se déplace à la vitesse constante de 300’000 km/s. Il suit que des signaux émis par différents satellites en même temps n’arrivent pas tous simultanément au récepteur, ce qui permet de calculer la position du récepteur. La lumière parcourt 30 cm en une nanoseconde (10^{-9} seconde) soit 3 mètres en 10 ns. La désynchronisation des montres des satellites ne doit donc pas dépasser quelques nanosecondes pour garantir le bon fonctionnement du système. Nous verrons qu’il est possible de fabriquer des montres qui ne dérivent pas de plus d’une nanoseconde par jour. Mais nous verrons aussi que les montres se désynchronisent par rapport aux horloges au sol d’environ 27 ns chaque minute en raison d’effets prédits par A. Einstein dans sa théorie de la relativité il y a plus de 100 ans. Le système fonctionne correctement uniquement parce que les satellites corrigent en permanence leur horloge en tenant compte des effets relativistes.

Mentionnons pour l’anecdote qu’au moment du lancement du satellite NTS-2 (le 23 juin 1977) qui emportait la première horloge atomique au césium et qui devait servir de satellite GPS prototype, certains ingénieurs doutaient encore de la nécessité de prendre en compte les effets relativistes jugés fantaisistes. Les sceptiques durent se rendre à l’évidence rapidement: le rythme de l’horloge embarquée variait de la valeur prédite par la théorie de la relativité.

Pendant longtemps la relativité a été considérée comme une construction magistrale de l’esprit humain mais avec des liens ténus avec l’expérience. De nos jours, un siècle après sa découverte, elle a des applications pratiques quotidiennes comme le GPS à l’instar de la théorie des nombres, dont une application, le protocole de cryptage RSA inventé en 1977 par Ronald Rivest, Adi Shamir et Len Adleman (cours PO-13502, vendredi 11 avril 2014), est utilisé quotidiennement dans les échanges sécurisés de données sur internet. Ces deux exemples montrent à quel point il est difficile de prédire quelles seront les retombées de la recherche fondamentale dans les applications de demain.

1. Introduction

Le GPS (acronyme en anglais de “Global Positioning System”) est un système permettant à ses utilisateurs n’importe où sur la Terre de connaître leur position avec une précision de l’ordre du mètre. Il est composé de trois parties, appelées des segments:

- (1) un réseau de satellites gravitant autour de la Terre à 20’000 km d’altitude (segment spatial),
- (2) un réseau de stations fixes au sol qui suivent les satellites (segment de contrôle),
- (3) les utilisateurs, en nombre illimité, qui reçoivent des informations des satellites et déterminent leur position à partir de ces informations grâce à un appareil électronique (récepteur GPS).

Le système GPS a été développé par l’armée américaine à partir des années 1960 sous l’impulsion du président Nixon. Le premier satellite prototype servant à tester la faisabilité du projet a été lancé en 1977 et le système est devenu fonctionnel en 1995. Un protocole d’encryptage des données transmises par les satellites limitait, pour les utilisateurs civils, la précision à une centaine de mètres. En 2000, le président Clinton rend accessible à tous les utilisateurs les données réservées jusqu’alors aux seuls militaires et permettant une géolocalisation au mètre près. Des systèmes similaires ont été mis au point par la Russie dès les années 1980 et par la Chine à partir de 2000. L’Europe développe un projet nommé “Galileo” qui devrait être opérationnel en 2020.

2. Calcul de la position du récepteur

Chaque satellite est équipé d’une montre atomique “**très précise**” (dérive de l’ordre de 1 ns= 10^{-9} s par jour). **Les montres des satellites sont synchronisées** avec le temps GPS (GPST) international. De plus, chaque satellite émet à intervalles de temps réguliers un message contenant l’heure indiquée par son horloge atomique, que nous notons

$$t_{ej}$$

pour le satellite j , ainsi que sa position (les éphémérides)

$$\vec{r}_j = \begin{pmatrix} x_j \\ y_j \\ z_j \end{pmatrix}$$

relativement à un repère donné \mathcal{R} , avec une précision de l’ordre du mètre. Le message est transmis par un signal radio sur la fréquences de 1’575.42 MHz (signal civil).

Le référentiel est le système géodésique WGS 84 dont l’origine coïncide avec le centre de la Terre et qui tourne avec elle. La Terre y est modélisée par un ellipsoïde de révolution.

Le récepteur GPS est un récepteur radio équipé d’une montre à quartz “**peu précise**” (dérive de l’ordre de 1 microseconde par jour), synchronisée avec le temps GPS international, et d’un ordinateur en mesure d’effectuer des calculs à partir des données transmises par les satellites du réseau GPS dont il peut capter les signaux. Nous notons

$$t_{rj}$$

l’heure à laquelle le récepteur reçoit le signal provenant du satellite j . Par ailleurs, nous notons

$$\vec{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

la position du récepteur GPS relativement au repère \mathcal{R} . Finalement, nous notons b le décalage de l'horloge à quartz du récepteur GPS par rapport au temps GPS international.

Chaque signal reçu fournit une équation du type

$$\begin{aligned}(x_j - x)^2 + (y_j - y)^2 + (z_j - z)^2 &= c^2(t_{rj} + b - t_{ej})^2 \\ \Rightarrow c^2(t_{rj} - t_{ej} + b)^2 - (x_j - x)^2 - (y_j - y)^2 - (z_j - z)^2 &= 0 \\ \Rightarrow c^2(t_{rj} - t_{ej})^2 - x_j^2 - y_j^2 - z_j^2 + c^2b^2 - x^2 - y^2 - z^2 \\ &\quad - 2[c^2(t_{rj} - t_{ej})(-b) - x_jx - y_jy - z_jz] = 0\end{aligned}$$

appelée équation de navigation. Il y a quatre inconnues

$$x, y, z \text{ et } b$$

Il faut donc au minimum quatre signaux pour déterminer ces quatre inconnues.

En notant

$$g = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

et

$$\vec{s} = \begin{pmatrix} c(-b) \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} \text{ et } \vec{s}_j = \begin{pmatrix} c(t_{rj} - t_{ej}) \\ x_j \\ y_j \\ z_j \end{pmatrix}$$

l'équation de navigation j s'écrit

$$\vec{s}_j^\top g \vec{s}_j + \vec{s}^\top g \vec{s} - 2\vec{s}_j^\top g \vec{s} = 0$$

Nous supposons que le récepteur reçoit $N \geq 4$ signaux. Notons

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} \vec{s}_1^\top g \vec{s}_1 \\ \vec{s}_2^\top g \vec{s}_2 \\ \vdots \\ \vec{s}_N^\top g \vec{s}_N \end{pmatrix}, \quad \vec{e} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \lambda = \vec{s}^\top g \vec{s} \text{ et } B = \begin{pmatrix} c(t_{r1} - t_{e1}) & x_1 & y_1 & z_1 \\ c(t_{r2} - t_{e2}) & x_2 & y_2 & z_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ c(t_{rN} - t_{eN}) & x_N & y_N & z_N \end{pmatrix}$$

alors, les N équations de navigation s'écrivent

$$\vec{a} + \lambda \vec{e} - 2B g \vec{s} = 0 \Rightarrow B g \vec{s} = \frac{1}{2}(\vec{a} + \lambda \vec{e})$$

Soit

$$D = (B^\top B)^{-1} B^\top$$

alors

$$\vec{s} = \frac{1}{2} g D (\vec{a} + \lambda \vec{e})$$

Par ailleurs, en notant $U = D^\top gD$, il vient

$$\begin{aligned} \lambda = \vec{s}^\top g \vec{s} &= \frac{1}{4} (\vec{a}^\top + \lambda \vec{e}^\top) \underbrace{D^\top gD}_{=U} (\vec{a} + \lambda \vec{e}) = \frac{1}{4} [\vec{a}^\top U \vec{a} + 2\lambda \vec{e}^\top U \vec{a} + \lambda^2 \vec{e}^\top U \vec{e}] \\ &\Rightarrow (\vec{e}^\top U \vec{e}) \lambda^2 + \lambda (2\vec{e}^\top U \vec{a} - 4) + \vec{a}^\top U \vec{a} = 0 \end{aligned}$$

Donnons quelques précisions. La matrice B est une matrice $N \times 4$ (N lignes, 4 colonnes). Par conséquent, $B^\top B$ est une matrice 4×4 et D est une matrice $4 \times N$ et U est une matrice $N \times N$.

Remarquons que B peut s'écrire comme

$$\begin{aligned} B &= \begin{pmatrix} c(t_{r_1} - t_{e_1}) & x_1 & y_1 & z_1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ c(t_{r_2} - t_{e_2}) & x_2 & y_2 & z_2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &\quad + \dots + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ c(t_{r_N} - t_{e_N}) & x_N & y_N & z_N \end{pmatrix} \\ &= B_1 + \dots + B_N \end{aligned}$$

De plus,

$$\begin{aligned} B_i^\top B_j &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ si } i \neq j \\ \text{et } B_j^\top B_j &= \vec{s}_j \vec{s}_j^\top = \begin{pmatrix} c(t_{r_j} - t_{e_j}) \\ x_j \\ y_j \\ z_j \end{pmatrix} (c(t_{r_j} - t_{e_j}) \quad x_j \quad y_j \quad z_j) = P_{\vec{s}_j} \end{aligned}$$

Par conséquent, $B^\top B$ est une somme de projecteurs

$$B^\top B = \sum_{j=1}^n P_{\vec{s}_j}$$

Pour déterminer la position du récepteur GPS, il faut construire B avec quatre signaux. Si la matrice B est inversible, il faut calculer la matrice D et résoudre l'équation du second degré pour trouver λ et finalement calculer \vec{s} avec la formule donnée plus haut. L'équation pour λ fournit deux solutions. La bonne solution est déterminée par la condition

$$x^2 + y^2 + z^2 \approx R_T$$

où R_T est le rayon de la Terre. Cette méthode est connue sous le nom de méthode de Bancroft. La procédure peut être recommencée avec 4 autres signaux (il suffit de remplacer l'un des quatre signaux par un nouveau) et calculer à nouveau la position. Les différentes positions peuvent être

pondérées par un indice de confiance en fonction de la position du satellite pour finalement établir une position moyenne et estimer une marge d'erreur.

3. Les trois segments

Les récepteur GPS ont envahi notre quotidien. Tous les "Smartphones" en sont équipés. Les erreurs du calcul de la position peuvent provenir, par exemple, des signaux réfléchis sur des bâtiments ou de phénomènes atmosphériques qui modifient l'indice de réfraction de l'atmosphère et donc la vitesse des signaux radio. Ce dernier phénomène peut être pris en compte partiellement, notamment par des récepteurs bi-fréquences qui utilisent le fait que l'indice de réfraction dépend de la fréquence. En général, les récepteurs GPS calculent leur position toutes les secondes.

Chaque satellite est équipé d'une horloge atomique qui dérive de moins d'une nanoseconde par jour. Il orbite à une altitude de $a = 20'000$ km. Il suit que sa vitesse v est donnée par

$$m \frac{v^2}{R_T + a} = \frac{GM_T m}{(R_T + a)^2} \Rightarrow v = \sqrt{\frac{GM_T}{R_T + a}} \approx 3890 \frac{\text{m}}{\text{s}} \text{ c'est-à-dire, environ } 1 \text{ m en } 0.257 \text{ ms}$$

où

$$G = 6.67 \cdot 10^{-11} \frac{\text{N} \cdot \text{m}^2}{\text{kg}^2} \quad M_T \approx 5.97 \cdot 10^{24} \text{ kg} \text{ et } R_T = 6.37 \cdot 10^6 \text{ m}$$

La période d'une orbite est en gros de 12 heures. L'altitude conditionne la zone terrestre couverte. Une altitude trop basse obligerait à déployer un trop grand nombre de satellites pour garantir la couverture de la totalité de la planète par un minimum de quatre satellites en permanence. Une altitude trop élevée contraindrait à augmenter la puissance ainsi que la masse des satellites pour un faible gain en ce qui concerne la zone de couverture.

Les orbites sont très peu elliptiques. Les satellites sont répartis sur six plans distincts inclinés de 55 degrés par rapport à l'équateur. Les orbites sont arrangées de façon à ce qu'au moins 4 satellites soient toujours visibles depuis n'importe quel point de la Terre à tout instant (avec jusqu'à 12 satellites visibles en même temps, voir figure 1).

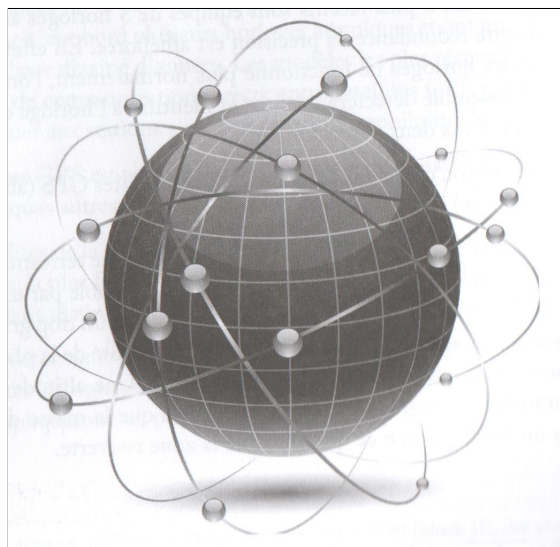


FIGURE 1.

Chaque satellite diffuse deux tables de données concernant les positions: un almanach et les éphémérides.

- (1) Un almanach donne les positions de tous les satellites avec une précision de l'ordre du kilomètre.
- (2) Les éphémérides sont des tables qui donnent la position des satellites avec une précision de l'ordre du mètre. Chaque satellite ne diffuse que les éphémérides qui le concerne.

Rappelons qu'un satellite parcourt environ 4 mètres tous les millièmes de seconde. Pour obtenir une précision de l'ordre du mètre sur la position des récepteurs GPS, il est indispensable que la position des satellites soit connue le plus précisément possible. Mais la position par rapport à quoi ?

Le géoïde terrestre est un référentiel imparfait en raison des forces de marée engendrées par le Soleil et la Lune. Les étoiles de notre galaxie, même si elles ont été longtemps tenues pour des points fixes, se déplacent en fait légèrement par rapport à nous. Nous devons donc prendre comme repère des astres beaucoup plus lointains tout en étant suffisamment lumineux pour être repérables depuis la Terre. Les candidats idéaux sont les quasars distants de plusieurs milliards d'années-lumière et principalement détectés par leurs émissions dans le domaine des ondes radio. Un quasar est la région compacte entourant un trou noir géant. Des milliers de quasars ont été cartographiés et servent pour le repérage des satellites du système GPS. Remarquons que là aussi, la théorie de la relativité intervient puisque les trous noirs sont des objets prédits par la relativité générale.

Le segment de contrôle est un réseau de stations au sol qui suivent et tiennent à jour les informations de trajectoire, les horloges atomiques, ainsi que d'autres paramètres de fonctionnement (en apportant les corrections nécessaires). Les échanges entre satellites et stations ont lieu dans les deux sens.

4. Les horloges atomiques

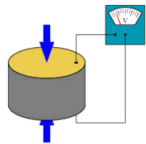
Toute horloge est composée de deux parties: un oscillateur (ou étalon de fréquence) qui fournit un signal (une fonction $t \mapsto s(t)$) périodique de période T (*i.e.* $s(t + T) = s(t)$ pour tout t) et un compteur qui compte les oscillations et qui affiche l'heure.

Deux paramètres déterminent la qualité d'une horloge: son exactitude en fréquence ($\frac{\Delta\nu}{\nu}$ qui mesure sa capacité à battre le rythme à la bonne fréquence $\nu = \frac{1}{T}$) et sa stabilité en fréquence. L'exactitude d'une horloge atomique au césium 133 est de l'ordre de $\frac{\Delta\nu}{\nu} \approx 10^{-14}$, soit environ une nanoseconde par jour ou encore 1 seconde tous les 3 millions d'années, alors que pour une montre à quartz, $\frac{\Delta\nu}{\nu} \approx 10^{-11}$, soit environ une microseconde par jour. Une montre qui perd une minute par jour de façon constante (c'est-à-dire qui affiche une minute de retard un jour après avoir été mise à l'heure, deux minutes après deux jours, trois minutes après trois jours, ...) est stable bien qu'inexacte.

Nous allons maintenant décrire brièvement le fonctionnement de deux types d'horloges: les horloges à quartz et les horloges atomiques au césium 133 utilisées dans le système GPS mais également pour définir la seconde (par le Bureau International des Poids et Mesures, BIPM) et le Temps Atomique International (TAI). L'histoire de la mesure du temps et des horloges est un vaste sujet que nous n'aborderons pas dans ces notes. Mentionnons seulement le dernier record en matière d'exactitude (février 2016): un groupe de l'université de Tokyo annonce avoir réalisé une horloge utilisant des atomes ultra froids de strontium dont l'exactitude serait $\frac{\Delta\nu}{\nu} \approx 2 \cdot 10^{-18}$, soit une seconde tous les 16 milliards d'années.

1. Les horloges à quartz.

Le quartz (principalement du dioxyde de silicium SiO_2) est abondant sur la Terre. Quand il est pur, il se présente sous la forme de cristaux transparents. Taillé sous forme d'un petit parallélépipède rectangle (une lame) et placé entre deux plaques métalliques, il est utilisé en électronique en raison de ses propriétés piézoélectriques.



Si l'on applique une tension électrique aux plaques métalliques, la lame se déforme. Réciproquement, si l'on déforme la lame en appliquant une contrainte mécanique, le cristal se polarise et une tension électrique peut être mesurée aux bornes du condensateur formé par les plaques.

De plus, à l'instar d'une cloche d'église, la lame de cristal a une fréquence de résonance propre. Lorsqu'elle est soumise à une contrainte puis relâchée, elle vibre à sa fréquence de résonance tout comme une cloche sonne à une note bien précise lorsqu'on la heurte.

Cette fréquence de résonance dépend de la taille de la lame mais aussi, dans une moindre mesure, de sa température. Si ν_0 désigne la fréquence de résonance de la lame à la température de 25 °C, alors $\frac{\Delta\nu_0}{\nu_0} \approx 2 \cdot 10^{-5}$ à 15 °C ou 35 °C, soit environ 1.8 seconde de dérive par jour.

En électronique, l'élément constitué d'une lame de quartz placée entre deux plaques métalliques est appelé un quartz. Techniquement, le composant est constitué d'un diapason dont les deux bras sont en quartz. Sur chaque bras est déposé une électrode permettant d'appliquer une tension extérieure. L'effet piézo-électrique permet de remplacer la sollicitation mécanique du diapason (percussion) par une sollicitation électrique (tension). Le diapason est placé sous vide dans un boîtier afin d'éviter le frottement dans l'air.



Un quartz avec $\nu_0 = 4 \text{ MHz}$

Il est équivalent à un circuit RLC monté en parallèle avec un condensateur (voir figure 2). Il constitue un filtre passe-bande: quand il est soumis à une tension alternative de fréquence ν , il laisse bien passer le courant uniquement si ν est proche de la fréquence de résonance ν_0 du quartz.

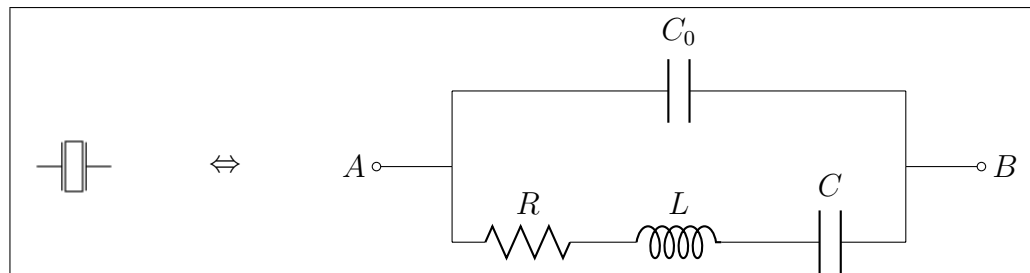


FIGURE 2. Circuit équivalent à un quartz.

Notons U_{AB} la tension électrique appliquée entre les points A et B . Nous supposons que

$$U_{AB} = U_0 \sin(\Omega t)$$

En notant I_0 le courant passant par C_0 et I_1 le courant traversant la branche inférieure du circuit, la loi de Kirchhoff donne:

$$U_{AB} = \frac{Q_0}{C_0} = RI_1 + LI_1 + \frac{Q_1}{C} \Rightarrow \dot{U}_{AB} = \frac{I_0}{C_0} = R\dot{I}_1 + L\ddot{I}_1 + \frac{I_1}{C}$$

Par ailleurs, en notant I le courant passant par le point A , il vient

$$I = I_0 + I_1$$

Nous pouvons, par exemple, compter positivement les courants allant de la gauche à la droite du circuit et négativement les courants allant en sens inverse. Il suit que

$$I_0(t) = C_0 \dot{U}_{AB} = C_0 U_0 \Omega \cos(\Omega t)$$

Par ailleurs, I_1 est une solution de l'équation différentielle

$$\ddot{I}_1(t) + \frac{R}{L} \dot{I}_1(t) + \frac{1}{LC} I_1(t) = \frac{U_0 \Omega}{L} \cos(\Omega t)$$

C'est une équation différentielle ordinaire, linéaire, à coefficients constants, inhomogène, d'ordre 2. Il faut commencer par trouver la solution générale de l'équation homogène

$$\ddot{I}_1(t) + \frac{R}{L} \dot{I}_1(t) + \frac{1}{LC} I_1(t) = 0$$

L'ensemble des solutions forme un espace vectoriel de dimension 2. Il suffit donc de trouver deux solutions linéairement indépendantes $f(t)$ et $g(t)$. Suivant Euler, nous cherchons des solutions de la forme

$$I_1(t) = e^{\lambda t}$$

Ainsi, nous trouvons que

$$e^{\lambda t} \left[\lambda^2 + \frac{R}{L} \lambda + \frac{1}{LC} \right] = 0 \quad \forall t$$

c'est-à-dire, que λ doit être une racine du polynôme caractéristique

$$p(\lambda) = \lambda^2 + \frac{R}{L} \lambda + \frac{1}{LC} = 0 \Rightarrow \lambda = -\alpha \pm \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2} \text{ où } \alpha = \frac{R}{2L} \text{ et } \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

Notons

$$\omega = \sqrt{|\alpha^2 - \omega_0^2|}$$

Il suit que

(1) Si

$$\alpha^2 > \omega_0^2 \text{ c'est-à-dire } R^2 > \frac{L}{4C} \text{ (régime sur-critique)}$$

alors

$$f(t) = e^{-\alpha t} e^{\omega t} \text{ et } g(t) = e^{-\alpha t} e^{-\omega t}$$

sont deux solutions linéairement indépendantes réelles de l'équation homogène.

(2) Si

$$\alpha^2 < \omega_0^2 \text{ c'est-à-dire } R^2 < \frac{L}{4C} \text{ (régime sous-critique)}$$

alors, en vertu de la formule d'Euler,

$$f_0(t) = e^{-\alpha t} e^{i\omega t} = e^{-\alpha t} (\cos(\omega t) + i \sin(\omega t)) \text{ et } g_0(t) = e^{-\alpha t} e^{-i\omega t} = e^{-\alpha t} (\cos(\omega t) - i \sin(\omega t))$$

sont deux solutions linéairement indépendantes complexes de l'équation homogène. Des combinaisons linéaires de ces solutions donnent deux solutions linéairement indépendantes réelles:

$$f(t) = \frac{f_0(t) + g_0(t)}{2} = e^{-\alpha t} \cos(\omega t) \text{ et } g(t) = \frac{f_0(t) - g_0(t)}{2i} = e^{-\alpha t} \sin(\omega t)$$

(3) Finalement, si

$$\alpha^2 = \omega_0^2 \text{ c'est-à-dire } R^2 = \frac{L}{4C} \text{ (régime critique)}$$

alors,

$$f(t) = e^{-\alpha t} \text{ et } g(t) = te^{-\alpha t}$$

sont deux solutions linéairement indépendantes réelles de l'équation homogène. En effet,

$$\dot{g}(t) = e^{-\alpha t} - \alpha te^{-\alpha t} \text{ et } \ddot{g}(t) = -2\alpha e^{-\alpha t} + \alpha^2 te^{-\alpha t}$$

Par conséquent,

$$\begin{aligned} \ddot{g}(t) + 2\alpha\dot{g}(t) + \omega_0^2 g(t) &= -2\alpha e^{-\alpha t} + \alpha^2 te^{-\alpha t} + 2\alpha e^{-\alpha t} - 2\alpha^2 te^{-\alpha t} + \omega_0^2 te^{-\alpha t} \\ &= e^{-\alpha t} \underbrace{[-2\alpha + 2\alpha]}_{=0} + te^{-\alpha t} \underbrace{[\alpha^2 - 2\alpha^2 + \omega_0^2]}_{=0} = 0 \end{aligned}$$

ce qui montre que $g(t)$ est aussi une solution de l'équation homogène dans le cas critique.

Comme l'ensemble des solutions de l'équation homogène est un espace vectoriel de dimension 2, il suit que toute solution de l'équation homogène est de la forme

$$I_1(t) = Af(t) + Bg(t) \text{ avec } A, B \in \mathbb{R}$$

Pour trouver la solution générale de l'équation inhomogène, il suffit de trouver une solution particulière $h(t)$ de l'équation inhomogène. En effet, si $h(t)$ et $k(t)$ sont des solutions de l'équation inhomogène, alors $h(t) - k(t)$ est une solution de l'équation homogène et par conséquent,

$$h(t) - k(t) = Af(t) + Bg(t) \Rightarrow h(t) = Af(t) + Bg(t) + k(t)$$

Comme le terme de droite de l'équation inhomogène n'est pas une solution de l'équation homogène, nous pouvons chercher une solution particulière de l'équation complète de la forme

$$h(t) = a \cos(\Omega t) + b \sin(\Omega t)$$

En substituant dans l'équation complète, on trouve

$$\begin{aligned} -a\Omega^2 \cos(\Omega t) - b\Omega^2 \sin(\Omega t) + 2\alpha(-a\Omega \sin(\Omega t) + b\Omega \cos(\Omega t)) + \omega_0^2(a \cos(\Omega t) + b \sin(\Omega t)) \\ = \cos(\Omega t) [-a\Omega^2 + 2\alpha b\Omega + \omega_0^2 a] + \sin(\Omega t) [-b\Omega^2 - 2\alpha a\Omega + b\omega_0^2] \\ = D \cos(\Omega t) \text{ où } D = \frac{U_0\Omega}{L} \end{aligned}$$

c'est-à-dire

$$\begin{cases} a [\omega_0^2 - \Omega^2] + b2\alpha\Omega & = D \\ a(-2\alpha\Omega) + b [\omega_0^2 - \Omega^2] & = 0 \end{cases}$$

On trouve que

$$a = \frac{D [\omega_0^2 - \Omega^2]}{[\omega_0^2 - \Omega^2]^2 + 4\alpha^2\Omega^2}$$

$$b = \frac{2\alpha\Omega D}{[\omega_0^2 - \Omega^2]^2 + 4\alpha^2\Omega^2}$$

En résumé, dans le cas sous-critique par exemple, la solution générale de l'équation complète est donnée par

$$I(t) = I_0(t) + I_1(t) = C_0 U_0 \Omega \cos(\Omega t) + I_1(t)$$

$$I_1(t) = e^{-\alpha t} [A \cos(\omega t) + B \sin(\omega t)]$$

$$+ \left(\frac{D [\omega_0^2 - \Omega^2]}{[\omega_0^2 - \Omega^2]^2 + 4\alpha^2\Omega^2} + C_0 U_0 \Omega \right) \cos(\Omega t) + \frac{2\alpha\Omega D}{[\omega_0^2 - \Omega^2]^2 + 4\alpha^2\Omega^2} \sin(\Omega t)$$

où, rappelons-le,

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

$$\alpha = \frac{R}{2L}$$

$$\omega = \sqrt{|\alpha^2 - \omega_0^2|}$$

$$D = \frac{U_0 \Omega}{L}$$

Les deux premiers termes de la solution décroissent rapidement (à cause du facteur $e^{-\alpha t}$) et peuvent être négligés pour étudier le régime stationnaire. En vertu de la formule

$$a \cos(\omega t) + b \sin(\omega t) = \sqrt{a^2 + b^2} \sin(\omega t + \delta) \text{ où } \tan(\delta) = \frac{a}{b}$$

(poser $a \cos(\omega t) + b \sin(\omega t) = A \sin(\omega t + \delta)$ pour $t = 0$ et $t = \frac{\pi}{2\omega}$), il suit que

$$I_1(t) = \sqrt{\left(\frac{D [\omega_0^2 - \Omega^2]}{[\omega_0^2 - \Omega^2]^2 + 4\alpha^2\Omega^2} + C_0 U_0 \Omega \right)^2 + \left(\frac{2\alpha\Omega D}{[\omega_0^2 - \Omega^2]^2 + 4\alpha^2\Omega^2} \right)^2} \sin(\Omega t + \delta) \text{ quand } t \rightarrow \infty$$

Pour un courant continu, la résistance d'un élément d'un circuit est définie par la relation

$$U = R \cdot I \Rightarrow R = \frac{U}{I} \text{ unités: } \frac{V}{A} = \Omega \text{ (Ohms)}$$

où U est la tension électrique aux bornes de l'élément et I le courant qui le traverse. Pour un courant alternatif, on définit l'**impédance** d'un élément de façon analogue:

$$Z = \frac{U_{max}}{I_{max}}$$

L'impédance du quartz est donnée par

$$\begin{aligned} Z(\Omega) &= \frac{U_0}{I_{max}} = \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{\frac{\Omega}{L}[\omega_0^2 - \Omega^2]}{[\omega_0^2 - \Omega^2]^2 + 4\alpha^2\Omega^2} + C_0\Omega\right)^2 + \left(\frac{2\alpha\frac{\Omega^2}{L}}{[\omega_0^2 - \Omega^2]^2 + 4\alpha^2\Omega^2}\right)^2}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{[\frac{1}{C\Omega} - L\Omega]}{[\frac{1}{C\Omega} - L\Omega]^2 + R^2} + C_0\Omega\right)^2 + \frac{R^2}{([\frac{1}{C\Omega} - L\Omega]^2 + R^2)^2}}} \end{aligned}$$

A titre d'exemple, pour un quartz avec $\nu_0 = 2^{15} = 32'768$ Hz, les valeurs de C , C_0 , L et R sont données par⁽¹⁾

$$C = 2.07 \text{ fF} = 2.07 \cdot 10^{-15} \text{ F}$$

$$C_0 = 3.3 \text{ pF} = 3.3 \cdot 10^{-12} \text{ F}$$

$$R = 28.1 \text{ K}\Omega = 28.1 \cdot 10^3 \Omega$$

$$L = 11'396.5 \text{ H}$$

L'impédance du quartz en fonction de la fréquence $\nu = \frac{\Omega}{2\pi}$ est représentée sur la figure 3. Remarquons que l'impédance atteint un minimum pour $\nu = \nu_0$.

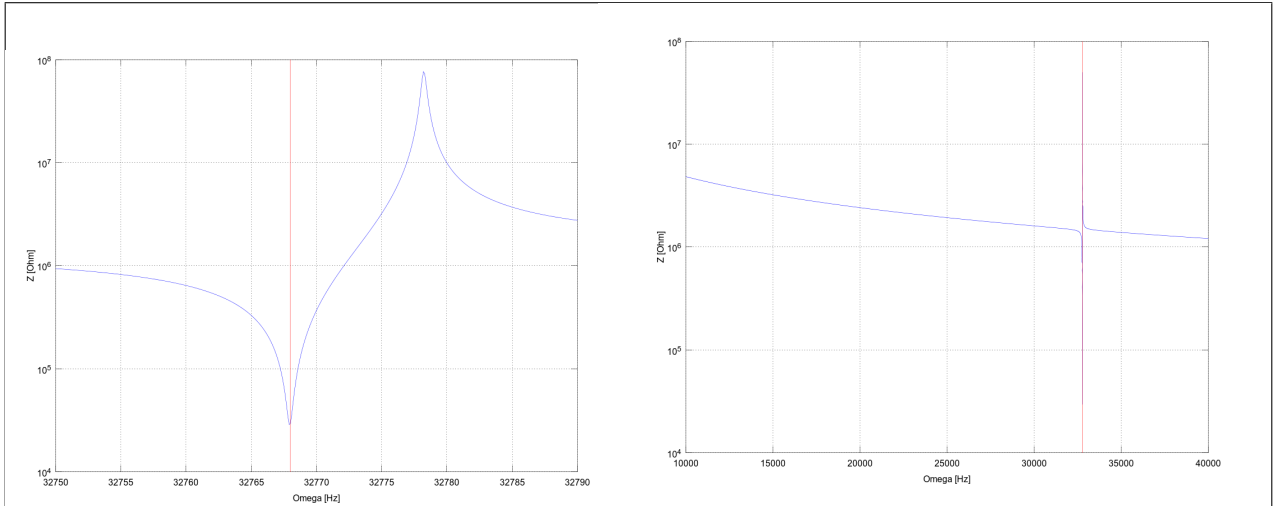


FIGURE 3. L'impédance $Z(\Omega)$ d'un quartz avec $\nu_0 = 2^{15} = 32'768$ Hz

Pour construire un oscillateur à quartz, il faut coupler le quartz à un amplificateur selon le schéma de la figure 4 (gauche). Le potentiel électrique V_s à la sortie de l'amplificateur (idéal !)

¹Données: Département de physique, ENS Cachan

est donné par

$$V_s = G \cdot V_e$$

où G est le gain de l'amplificateur et V_e le potentiel à l'entrée de l'amplificateur. Le potentiel à la sortie de l'élément β est donné par βV_s où V_s est le potentiel à l'entrée de l'élément β . Par conséquent,

$$V_s = G \cdot V_e = G\beta V_s \text{ et } V_s \neq 0 \Rightarrow G\beta = 1$$

Si l'élément β est un filtre passe-bande comme un quartz, alors l'oscillateur part en oscillation à la fréquence du filtre au moment de la mise sous tension au cours de laquelle le gain G de l'amplificateur croît de 0 à $\frac{1}{\beta}$. L'amplificateur peut être réalisé avec un transistor comme sur la figure 4 (droite).

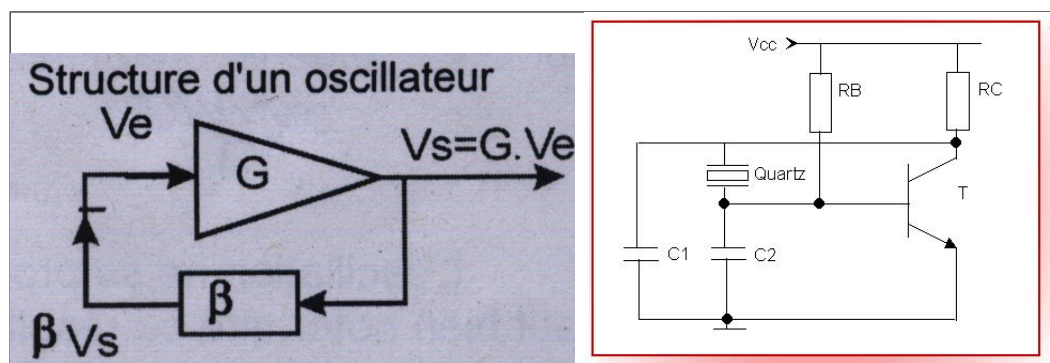


FIGURE 4. Oscillateur à quartz.

2. Les horloges atomiques.

L'idée d'utiliser des atomes pour mesurer le temps et conserver l'heure apparaît déjà dans un livre de William Thomson (alias Lord Kelvin) publié en 1879. En 1945, lors d'une conférence, Isidor Rabi (prix Nobel de physique 1944 "pour sa méthode de résonance servant à enregistrer les propriétés magnétiques du noyau atomique") évoque l'emploi de la méthode des "jets atomiques" qu'il a développée, dans le but de construire une horloge basée sur l'atome de césium 133 (Cs: nombre de protons 55, nombre de neutrons: 78).

En 1967, la CGPM (Conférence Générale des Poids et Mesures; organisme inter-gouvernemental qui supervise les travaux du BIPM² et de la CIPM³) adopte à une majorité écrasante la nouvelle définition de la seconde basée sur une propriété du césium 133 et abandonne le temps astronomique issu de l'observation du ciel.

Depuis le premier janvier 1972, un système planétaire de mesure et de conservation du temps basé sur un réseau mondial de 260 horloges atomiques au césium 133 supervisé par le BIPM définit le Temps Atomique International (TAI) et le temps universel coordonné (*Universal Time Coordinated*, UTC) construit à partir du TAI mais contraint, à l'aide de "secondes intercalaires", de demeurer proche du temps astronomique.

Commençons par nous intéresser à un atome plus simple que le césium: l'atome d'hydrogène. Il est constitué d'un proton (charge: $+1.6 \cdot 10^{-19}$ C, masse: $1.67 \cdot 10^{-27}$ kg) et d'un électron (charge:

²Bureau International des Poids et Mesures à Sèvres dans la banlieue parisienne; organisme responsable des étalons de mesures internationaux.

³Conférence Générale des Poids et Mesure; supervise le BIPM.

$-1.6 \cdot 10^{-19}$ C, masse: $9.11 \cdot 10^{-31}$ kg). Le modèle utilisé généralement pour présenter l'atome d'hydrogène est le modèle planétaire dans lequel l'électron gravite autour du proton. Ce modèle est incohérent avec l'électromagnétisme, puisque toute charge subissant une accélération émet un rayonnement électromagnétique et perd de l'énergie (ce phénomène est utilisé pour produire des rayons X et du rayonnement synchrotron). Par conséquent, si l'électron gravitait autour du proton, il finirait par tomber sur le proton.

Le modèle quantique de l'atome d'hydrogène décrit l'électron comme une densité de charge stationnaire: c'est un "nuage enveloppant le noyau". Seules certaines configurations du nuage électronique sont possibles (ces configurations sont appelées des états); elles correspondent à des valeurs précises de l'énergie de l'électron. Sous l'effet de perturbations extérieures (champs électromagnétiques, agitation thermique), l'électron peut changer d'état en émettant de la lumière (un photon) si le nouvel état a une énergie plus basse ou en absorbant de la lumière si le nouvel état a une énergie plus haute. La fréquence de l'onde électromagnétique émise ou absorbée est donnée par la relation

$$h\nu = \Delta E = E_{finale} - E_{initiale} \text{ où } h \approx 6.63 \cdot 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s}$$

est la constante de Planck. Lorsqu'on observe la lumière blanche d'une lampe à hydrogène à travers un prisme (qui sépare les différentes longueurs d'onde), on observe des raies qui correspondent aux transitions décrites ci-dessus (voir figure 5). Rappelons que la longueur d'onde est reliée à la fréquence par la relation

$$\lambda\nu = c \approx 3 \cdot 10^8 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

où c est la vitesse de la lumière.

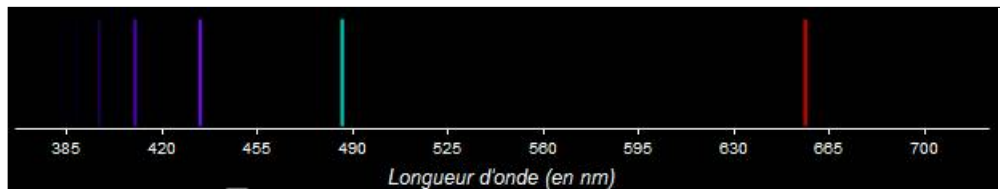


FIGURE 5. Spectre d'émission de l'atome d'hydrogène.

Le spectre de l'atome d'hydrogène est donné par la formule de Rydberg:

$$\frac{1}{\lambda} = R_H \left(\frac{1}{n_1^2} - \frac{1}{n_2^2} \right) \text{ où } n_1 < n_2 \in \mathbb{N} \text{ et } R_H = 10'973'731.6 \text{ m}^{-1}$$

est la constante de Rydberg. Par exemple, pour $n_1 = 2$ et $n_2 = 3$, on obtient

$$\lambda = \frac{1}{R_H \left(\frac{1}{2^2} - \frac{1}{3^2} \right)} \approx 656 \text{ nm} \Rightarrow \nu = \frac{c}{\lambda} \approx 4.6 \cdot 10^{14} \text{ Hz}$$

Cette transition correspond à la raie rouge du spectre. En principe, nous pourrions donc utiliser cette lumière rouge comme étalon de fréquence, c'est-à-dire comme oscillateur d'une horloge. Comme nous l'avons mentionné, une horloge est également constituée d'un compteur chargé de compter les cycles de l'oscillateur et de transformer le résultat en secondes, minutes, heures, Or comment compter plus de 10^{14} tic-tacs par seconde ? Une telle rapidité était hors d'atteinte dans les années 40 et elle est à la frontière de ce que l'on sait faire de nos jours.

En plus d'une charge et d'une masse, l'électron et le proton ont un *spin* (ou moment cinétique intrinsèque). Ils sont comme de petits aimants avec seulement deux directions possibles: soit ils pointent dans la même direction (on dit qu'ils sont parallèles) soit dans des directions exactement opposées (on dit qu'ils sont anti-parallèles). L'énergie de l'électron dans ces deux situations est légèrement différente (on parle de structure "hyperfine" du spectre due à l'interaction spin-spin). Par exemple, quand l'électron passe de l'état fondamental (celui avec l'énergie la plus basse) parallèle à l'état fondamental anti-parallèle, il perd un peu d'énergie et émet un photon d'une longueur d'onde de 21 cm (soit $\nu = 1'420$ MHz). Cette transition hyperfine est bien connue des radioastronomes, car elle permet de détecter des nuages d'atomes d'hydrogène dans la Voie Lactée ou dans d'autres galaxies. Cette émission à 21 cm fut prédite en 1944 par Hulst et observée en 1951.

Les autres atomes de la première colonne du tableau de Mendeleïev: Lithium (Li, 3, 6.94), Sodium (Na, 11, 22.99), Potassium (K, 19, 39.10), Rubidium (Rb, 37, 85.47), Césium (Cs, 55, 132.91) et Francium (Fr, 87, 223) ont tous un électron qui se singularise par une liaison au noyau plus faible que les autres électrons (il est plus "éloigné" du noyau). Ce sont des métaux dits alcalins. De plus, les autres électrons sont tous appariés, c'est-à-dire par paires anti-parallèles. Ainsi, l'effet magnétique global de tous les autres électrons est nul. En conséquence, les seuls effets magnétiques dans les atomes alcalins sont dus au noyau et à l'électron externe (dit célibataire). Cet électron célibataire se comporte comme l'électron de l'atome d'hydrogène; en particulier, il admet des paires d'états hyperfins.

En particulier, la transition hyperfine entre les deux états fondamentaux de l'électron célibataire (transition parallèles à anti-parallèles) émet un photon à 9'192'631'770 Hz, soit une longueur d'onde d'environ 3.26 cm. C'est la fréquence de transition hyperfine pour l'état fondamental la plus élevée de tous les métaux alcalins. De plus, la longueur d'onde est en plein milieu du spectre des ondes radios dites micro-ondes. Ces longueurs d'onde étaient utilisées dans les radars, et nombre d'entre eux, surplus de la guerre, étaient disponibles à la fin des années 40. Parmi les éléments cités (y compris l'hydrogène) seuls le césium et le sodium se présentent dans la nature sous une forme pure avec un seul isotope (par exemple, un atome d'hydrogène sur 7000 environ a un noyau composé d'un proton et d'un neutron, le deutérium). Chaque atome de césium dans la nature a 55 protons et 78 neutrons et a donc une masse atomique de 133. Cela signifie que chaque atome de césium émet ou absorbe, lors des transitions hyperfines, des photons ayant toujours la même fréquence.

Le césium présente d'autres avantages. Sa température de fusion très basse implique qu'il est facile de le faire passer à l'état de vapeur. Une fois vaporisé, sa masse atomique élevée garantit qu'il se déplace à une vitesse plus faible que celle des molécules d'air, d'environ la moitié. Enfin, à l'exception du francium (dont il existe aucun isotope stable), il est le plus grand des métaux alcalins ce qui a pour conséquence que son électron célibataire est faiblement lié: il est plus facile d'extraire un électron du césium que de n'importe quel autre métal alcalin stable. Pour toutes ces raisons, après le discours de Rabi en 1945, les physiciens comprirent que la réalisation d'une horloge atomique passait par l'utilisation des propriétés singulières du césium.

En 1948, Lyons du NBS⁴ charge Kusch, un collègue de Rabi à l'université de Columbia, d'étudier la possibilité de construire une horloge atomique au césium. A la même époque, Zacharias du MIT et Essen du NPL⁵ se lancent également dans la construction d'un étalon de mesure au

⁴*National Bureau of Standards.*, le bureau américain des étalons de mesure (actuellement le NIST).

⁵*National Physical Laboratory*, le laboratoire britannique national de métrologie

césium. Toutes les horloges atomiques construites jusque dans les années 90 fonctionnent sur le principe élaboré par Kusch.

Tout le dispositif est placé dans une enceinte à vide afin que les molécules d'air n'empêchent pas le faisceau d'atomes de césium de se propager en ligne droite. Un petit four électrique contenant moins d'un gramme de césium est chauffé à 200 degrés Celsius. Les atomes de Césium ainsi chauffés jaillissent d'une étroite fente percée dans l'enceinte du four avec une vitesse d'environ 200 m/s. Environ la moitié des atomes sont dans l'état hyperfin "bas" (anti-parallèles) et l'autre moitié dans l'état hyperfin "haut" (parallèles).

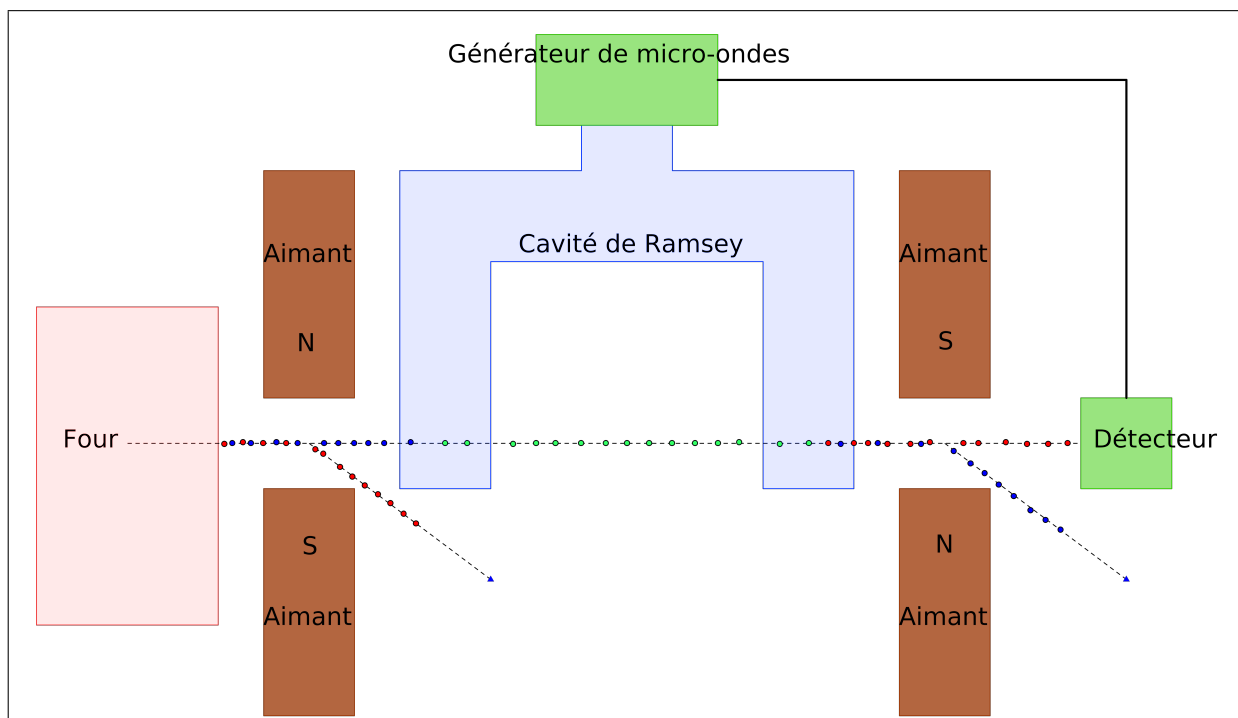


FIGURE 6. Schéma de Kusch d'une horloge atomique au césium 133 avec cavité de Ramsey.

Les atomes de césium passent ensuite à travers un aimant de Stern-Gerlach qui dévie vers le bas les atomes dans l'état hyperfin haut et vers le haut les atomes dans l'état hyperfin bas. Cette technique de séparation magnétique a été inventée par Stern et Gerlach au début des années 1920. Les atomes dans l'état hyperfin haut sont perdus tandis que les atomes dans l'état hyperfin bas entrent dans une cavité de Ramsey.

La cavité de Ramsey est un guide d'ondes. Elle est reliée à un générateur de micro-ondes dont la fréquence est contrôlée par un oscillateur à quartz. La fréquence de l'oscillateur peut être ajustée. Les atomes de césium entrent dans la cavité de Ramsey et sont soumis aux micro-ondes. Ils passent de l'état hyperfin bas à l'état hyperfin haut en absorbant un photon seulement si la fréquence des micro-ondes vaut $9'192'631'770$ Hz.

Dans l'idée originale de Rabi, les atomes devaient passer dans un long tube rempli de micro-ondes. Plus ils y restaient longtemps, plus la probabilité qu'ils subissent une transition de l'état hyperfin bas vers l'état hyperfin haut était grande. Or cette méthode présente des désavantages considérables. Premièrement, il est difficile de contrôler l'exposition dans un long tube. Par

ailleurs, dans le scénario de Rabi, les atomes se déplaçaient dans la même direction que les micro-ondes et, dû à l'effet Doppler⁽⁶⁾, la longueur d'onde des micro-ondes vues par les atomes étaient différente de la longueur d'onde donnée par l'oscillateur à quartz. Ramsey avait remarqué qu'on pouvait obtenir la transition de l'état hyperfin bas vers l'état hyperfin haut aussi efficacement en soumettant les atomes à deux brèves impulsions micro-ondes lors du passage des atomes dans les deux bras de sa cavité. Si la fréquence des micro-ondes est bien ajustée sur la fréquence de transition entre les deux états hyperfins de l'état fondamental de l'atome de césium, la première impulsion met les atomes dans un état qui est la superposition de l'état hyperfin bas et de l'état hyperfin haut (en mécanique quantique, l'ensemble des états possibles est un espace vectoriel) et la deuxième impulsion finit la travail en expédiant les atomes dans l'état hyperfin haut. Plus le temps passé par les atomes entre les deux impulsions (entre les deux bras) est long, plus le système est efficace, c'est-à-dire plus la probabilité de faire passer un atome de l'état hyperfin bas vers de l'état hyperfin haut est grande quand la fréquence des micro-ondes est correctement ajustée. De plus, avantage considérable, la trajectoire des atomes et la direction des micro-ondes sont perpendiculaires, ce qui permet de s'affranchir du problème de déplacement des fréquences dû à l'effet Doppler.

Quand ils émergent enfin du second bras de la cavité de Ramsey, les atomes de césium traversent à nouveau un aimant de Stern-Gerlach. Ceux qui ont subi une transition de l'état hyperfin bas vers l'état hyperfin haut et qui sortent du deuxième bras de la cavité de Ramsey dans l'état hyperfin haut sont déviés vers un détecteur, les autres sont perdus. Le détecteur est constitué d'un fil métallique chauffé au rouge face à une plaque de métal chargée négativement. Comme l'électron célibataire du césium est faiblement lié, la température du fil est suffisante pour arracher cet électron. L'atome chargé, devenu un ion positif, est capturé par la plaque, ce qui engendre un courant. Plus le nombre d'atomes s'écrasant sur la plaque est important, plus le courant est intense. Par conséquent, plus la fréquence de l'oscillateur à quartz est proche de la fréquence de transition entre les deux états hyperfins de l'état fondamental de l'atome de césium (9'192'631'770 Hz), plus le courant mesuré par le détecteur est intense. L'astuce consiste à ajuster la fréquence de l'oscillateur à quartz pour maintenir le courant du détecteur maximal. Dans le premier étalon de fréquence du NPL, cette ajustement était fait manuellement. Il fut automatisé par la suite.

5. Le temps GPS, le TAI et l'UTC

Comme nous l'avons mentionné, c'est suite à l'assemblée générale de la CGPM en octobre 1967, que l'ère du temps astronomique se termine. Jusqu'à cette date, la mesure du temps passait par l'observation du ciel.

1. Le temps solaire.

Considérons un observateur sur la Terre. Le grand demi-cercle passant par le point le plus au nord de son horizon, le zénith (la direction à la verticale de l'observateur) et le point le plus au sud de l'horizon de l'observateur est appelé le méridien qui divise la voûte céleste en deux moitiés, est et ouest.

On définit le jour solaire comme l'intervalle de temps qui sépare deux traversées consécutives du méridien par le soleil. La mesure du temps solaire se base donc sur le mouvement apparent du soleil dans le ciel et donc sur la rotation de la Terre, supposée constante (direction et vitesse).

⁶Tout comme la tonalité d'un son paraît plus haute quand sa source s'approche de nous (et plus basse quand sa source s'éloigne de nous), comme par exemple le son des ambulances, la fréquence d'une onde électromagnétique paraît plus élevée si sa source s'approche de l'observateur. Mais attention, l'explication de ce phénomène découvert par Doppler, est totalement différente dans le cas des ondes sonores et des ondes électromagnétiques.

Cette méthode fournit un repère temporel (midi) et la durée du jour. Cette durée n'est pas constante. Le jour solaire peut varier de 24 heures moins 22 secondes en septembre et 24 heures plus 30 secondes en décembre (voir figure 7). Elle définit le **temps solaire apparent**.

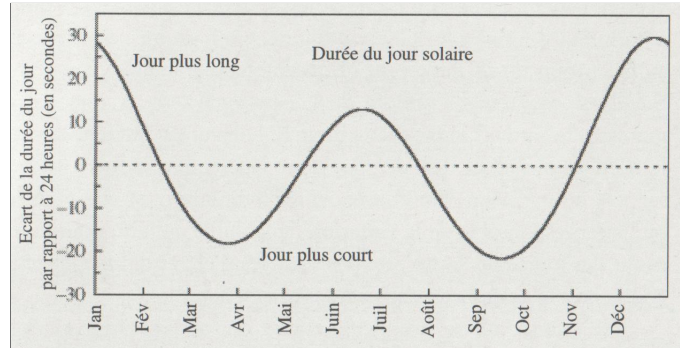


FIGURE 7. Variations de la durée du jour solaire (source: “Combien dure une seconde ?” de Tony Jones, EDP Sciences, 2000).

Pour comprendre l'origine de ces variations du jour solaire apparent, quelques rappels concernant le mouvement de la Terre autour du Soleil s'imposent. Le mouvement de la Terre autour du Soleil se fait dans un plan appelé le plan écliptique. La trajectoire est une ellipse dont le Soleil occupe un des foyers. Comme Kepler (1571-1630) l'a remarqué après avoir analysé et interprété les données accumulées par son maître Tycho Brahé (1546-1601) sur les positions des planètes par rapport aux étoiles fixes de notre firmament, la vitesse aréolaire de la Terre, relativement à un référentiel lié au centre du Soleil et fixe par rapport aux étoiles lointaines, est constante. La vitesse aréolaire est donnée par

$$\vec{v}_{areo}(t) = \frac{1}{2} \vec{r}(t) \times \dot{\vec{r}}(t)$$

Les unités sont des m^2/s . C'est la surface balayée par le vecteur position \vec{r} par unité de temps. Par conséquent, la vitesse de la Terre n'est pas constante. Par exemple, au périhélie (point de l'orbite terrestre le plus proche du Soleil),

$$v_{areo} = \left\| \frac{1}{2} \vec{r} \times \dot{\vec{r}} \right\| = \frac{1}{2} r_p v_p$$

car l'angle entre la vitesse et \vec{r} vaut 90 degrés. De même, à l'aphélie (point de l'orbite terrestre le plus éloigné du Soleil)

$$v_{areo} = \frac{1}{2} r_a v_a$$

Il suit que

$$r_a v_a = r_p v_p \Rightarrow \frac{v_p}{v_a} = \frac{r_a}{r_p} = \frac{1.521 \cdot 10^{11} \text{ m}}{1.471 \cdot 10^{11} \text{ m}} \approx 1.034$$

Par ailleurs, la terre tourne autour d'un axe passant par les pôles. Cet axe n'est pas perpendiculaire au plan écliptique, mais il fait un angle de 23.45° .

Vu de la Terre, le Soleil semble parcourir une orbite autour de la Terre. Sa trajectoire apparente sur le fond de ciel s'appelle l'écliptique (voir figure 8, gauche). S'il était possible de voir les étoiles

et le Soleil en même temps, nous constaterions que le Soleil se déplace lentement vers l'est le long de l'écliptique, à raison, en moyenne, de

$$\frac{360}{365} \approx 0.986 \text{ degré/jour}$$

En raison de la non-constance de la vitesse de la Terre autour du Soleil, le Soleil semble se déplacer à 1.019 degré/jour en janvier et à 0.953 degré/jour en été.

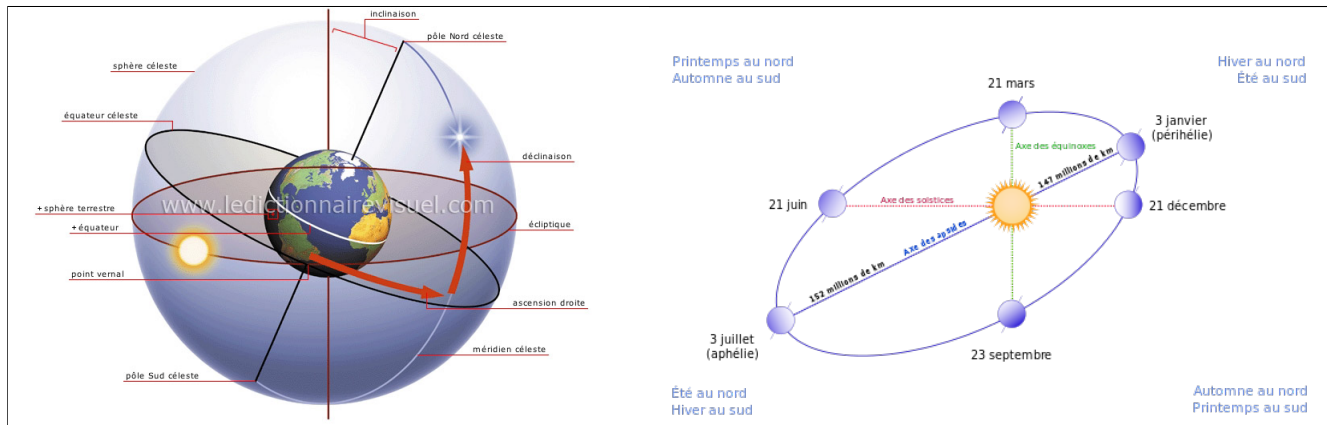


FIGURE 8. Ecliptique et orbite terrestre.

Par ailleurs, en raison de l'inclinaison de l'axe de rotation de la Terre par rapport au plan écliptique, outre son mouvement d'ouest en est, le Soleil se déplace aussi vers le nord au printemps et vers le sud en automne. Ce n'est qu'aux solstices (aux alentours du 21 juin et du 21 décembre) que le mouvement apparent du Soleil est exactement orienté de l'ouest vers l'est. A tout autre moment de l'année, le mouvement du Soleil a une composante vers le nord ou vers le sud et il se déplace donc légèrement moins vite par rapport au méridien. Par conséquent, l'inclinaison de l'axe de rotation terrestre allonge la durée du jour aux solstices et la raccourcit aux équinoxes de printemps et d'automne.

L'effet combiné de la non constance de la vitesse de la Terre et de l'inclinaison de l'axe de rotation de la Terre explique la variation de la durée du jour d'environ ± 30 secondes sur une année.

Pour remédier à ces variations, les astronomes ont inventé le temps solaire moyen basé sur le mouvement d'un soleil imaginaire se déplaçant de façon régulière le long de l'équateur (et non sur l'écliptique). C'est un artifice mathématique appelé "équation du temps" (voir, par exemple, table CRM p. 190) pour éliminer les effets de l'orbite elliptique et de l'inclinaison de l'axe de la Terre sur la durée du jour.

L'étape suivante vers une coordination mondiale fut l'invention des fuseaux horaires en 1883. En 1928, le Temps Universel fut créé (UT en anglais) qui est simplement le temps solaire moyen du méridien de Greenwich avec un jour commençant à minuit. Pour la première fois, l'humanité était dotée d'un système horaire clair et non ambigu. Le Temps Universel reposait sur le jour solaire moyen qui était divisé en 86'400 secondes.

Le Soleil couvre un demi-degré dans le ciel et il lui faut 2 minutes pour se déplacer de son propre diamètre apparent. En pratique, les astronomes mesurent le temps en observant les étoiles et plus précisément la traversée du méridien définissant ainsi le jour sidéral. En raison de la

rotation de la Terre autour du Soleil, le jour sidéral est plus court que le jour solaire, il dure 23 heures 56 minutes et 4 secondes.

2. Variations de la vitesse de rotation de la Terre.

A la façon d'une toupie, l'axe de rotation de la Terre bouge: il a un mouvement de précession et de nutation. Pour tout compliquer, Chandler découvrit en 1880 que les pôles tournent. Il ne s'agit d'un déplacement de l'axe de rotation de la Terre par rapport à sa surface. La Lune intervient aussi dans le processus de rotation de la Terre. La force de gravitation de la Lune exercée sur la Terre

$$F = G \frac{M_T m_L}{R^2}$$

est plus forte du côté de la Terre tourné vers la Lune et un peu plus faible du côté opposé. Cette différence est responsable des phénomènes de marées et induit une déformation de la Terre en forme ellipsoïde de révolution dont l'axe principal est dirigé vers la Lune créant une sorte de bourrelet (principalement un bourrelet d'eau des océans). Or la Terre tourne sur elle-même plus vite que la Lune ne tourne autour d'elle. Il en résulte que la Terre solide tourne entourée de ses bourrelets tournant moins vite, provoquant une friction entre l'eau des océans et les fonds marins, particulièrement en eau peu profonde près des plateaux continentaux. Les bourrelets agissent comme des patins de freins. La chaleur dissipée par ces frictions a été estimée à 4 GW. Elle est responsable du ralentissement faible mais mesurable de la vitesse de rotation de la Terre sur elle-même.

La Lune n'a pas d'océans, mais la Terre provoque des marées de la croûte lunaire, d'une hauteur d'environ 10 mètres. On pense que ce sont ces forces de marées dues à la Terre qui ont freiné la rotation de la Lune sur elle-même jusqu'à l'arrêter complètement du point de vue de la Terre, ayant pour conséquence qu'une face de la Lune n'est jamais visible depuis la Terre (la face cachée de la Lune). Par ailleurs, en raison du théorème du moment cinétique

$$\dot{\vec{L}} = \vec{M}$$

la diminution du moment cinétique de la Terre est compensé par une augmentation du moment cinétique de la Lune (le moment cinétique total du système Terre-Lune est conservé car $\vec{M} = \vec{0}$) qui se traduit par un éloignement de la Lune d'environ 4 cm par an (mesuré par des faisceaux laser réfléchis sur des réflecteurs posés sur la surface de la Lune par les missions Apollo).

3. Le temps des éphémérides.

Le phénomènes décrits plus haut sont responsables de variations de la durée du jour, mesurées dans les années 1930, de l'ordre de 30 millisecondes. Ces variations ont une composante imprévisible. Ces constatations conduisirent l'Assemblée Générale de l'UAI⁷ à adopter en 1952 un système de mesure du temps appelé le Temps des Éphémérides (TE) dont l'unité de base est l'année sidérale en 1900, soit le temps mis par la Terre pour faire exactement un tour du Soleil par rapport aux étoiles. Cette durée varie (faiblement et de façon bien connue), c'est pourquoi il fallut préciser l'année pour obtenir une définition rigoureuse. En raison de la précession de l'axe de rotation la Terre, l'année sidérale est plus longue 20' 24" que l'année tropique définie par la durée entre deux équinoxes de printemps consécutifs. En 1956, la seconde officielle SI⁸ fut définie

⁷Union Astronomique Internationale

⁸Système International d'Unités

comme la fraction

$$\frac{1}{31556925.9747}$$

de l'année tropique le 31 décembre 1899.

Le temps des éphémérides étant difficilement accessible (assigner une heure précise à un événement nécessitait des observations et des calculs laborieux de l'ordre de plusieurs années) fut un des arguments décisifs pour passer au temps atomique. Cette transition fut précédée d'une comparaison de la seconde TE avec la seconde atomique: en 1958, après trois ans de collaboration entre l'USNO⁹ et le NPL¹⁰ il fut établi que la seconde TE semblait bel et bien constante et égale à 9'192'631'770 cycles de la transition hyperfine du césium 133.

4. Le temps atomique.

En octobre 1967, la définition officielle de la seconde fut définie à partir de la transition hyperfine du césium 133 et le premier janvier 1972, un système planétaire de mesure et de conservation du temps, basé sur le TAI⁽¹¹⁾ et l'UTC⁽¹²⁾, vit le jour.

Le TAI n'est pas dicté par une horloge "mondiale" mais par un réseau de 260 horloges atomiques. Ce système permet de conserver la mesure du temps même quand des horloges doivent être réparées ou remplacées par des modèles plus précis. N'oublions pas que les horloges atomiques battent plus de 9 milliards de coups par seconde !

Le réseau est divisé en deux catégories. Les étalons primaires (une dizaine) répartis dans différentes laboratoires, sont chargés de fournir des secondes SI les plus exactes possibles. L'erreur relative en fréquence est de l'ordre de 10^{-13} . Nous verrons que pour garantir une telle précision, le BIPM doit tenir compte de l'altitude des étalons primaires. En effet, en raison d'effets relativistes, le rythme d'une horloge augmente d'un facteur $\approx 1.1 \cdot 10^{-13}$ par kilomètre d'altitude. Par exemple, la seconde de l'étalon primaire de Boulder dans l'État du Colorado (1650 m) est plus courte que la seconde SI d'un facteur $1.8 \cdot 10^{-13}$. Par jour, cela représente un écart d'environ 16 nanosecondes.

Les autres horloges sont les gardiennes du temps. Les laboratoires du réseau transmettent une fois par mois au BIPM¹³ l'heure marquée par leurs horloges à un instant fixé par le BIPM. La coordination des mesures est réalisée grâce aux satellites du réseau GPS qui servent de "top" pour la mesure selon un protocole bien précis établi par le BIPM (n'oublions pas qu'en une nanoseconde la lumière parcourt 30 cm). Chaque fin de mois, le BIPM analyse les données transmises et une moyenne pondérée est calculée pour établir l'heure EAL¹⁴ du "top" du début du mois. Les horloges du réseau reçoivent des "notes" ou pondérations suivant divers critères de fiabilité.

Une fois la seconde EAL déterminée, elle est comparée à la seconde SI fournie par les étalons primaires et réajustée, ce qui permet finalement d'établir le TAI. Le BIPM envoie une fois par mois aux laboratoires nationaux des rapports quant à la qualité de leur temps comparé au TAI ("circulaires T"). Ces rapports sont utilisés par les laboratoires nationaux pour effectuer des éventuelles corrections.

Pour fixer les idées, donnons quelques ordres de grandeur. L'écart entre le TAI et le temps des horloges des laboratoires peut varier de 10 nanosecondes (pour les meilleurs élèves) à quelques

⁹United States Naval Observatory, l'observatoire national des États-Unis

¹⁰National Physical Laboratory, le laboratoire britannique national de métrologie

¹¹Temps Atomique International

¹²Universal Time Coordinated

¹³Bureau International des Poids et Mesures

¹⁴Echelle Atomique Libre

micro-secondes (pour les cancre). Par ailleurs, en 1990 l'erreur relative entre la seconde EAL et la seconde SI était de l'ordre de $7 \cdot 10^{-13}$.

Le temps UTC⁽¹⁵⁾ est construit à partir du TAI. Il diffère du TAI uniquement d'un nombre entier de secondes. Par ailleurs, il est contraint de ne pas différer du temps UT1 de plus de 0.9 secondes. Cette contrainte est satisfaite par l'ajout de "secondes intercalaires". Le premier janvier 1972, on avait TAI-UTC=10 secondes, le 1.1.1999 TAI-UTC=32 secondes, le 1.1.2016 TAI-UTC=33 secondes et le 30 juin 2015 TAI-UTC=36 secondes. Le temps UT0 est le temps mesuré à partir des transits stellaires (traversée du méridien par une étoile). En raison du mouvement de l'axe des pôles terrestres qui modifie périodiquement la longitude et la latitude des observatoires, UT0 varie quelque peu d'un endroit à l'autre de la Terre. Le temps UT0 corrigé de ces effets de déplacement de l'axe de rotation de la Terre donne le temps UT1.

Finalement, par définition, le temps GPS est donné par TAI-19 secondes. Ce temps est diffusé par les satellites du réseau GPS et est accessible via les récepteurs portatifs GPS.

La transmission du temps officiel est une source d'inexactitudes en raison de la vitesse finie de transmission des signaux. Le temps de transmission peu être estimé par diverses techniques "d'aller-retour" et le temps diffusé peut ainsi être corrigé pour que le temps reçu soit le plus précis possible.

6. Les corrections relativistes

Nous allons voir qu'en raison d'effets relativistes, les horloges atomiques des satellites dérivent par rapport aux horloges au sol d'une trentaine de nanosecondes par minute. Sans correction, les effets relativistes seraient responsables d'une perte de précision d'environ 10 mètres chaque minute du système de localisation.

Cette désynchronisation est due à deux effets relativistes agissant en sens opposé: le premier provoque un retard des horloges embarquées à bord des satellites et le second une avance.

En raison de la vitesse des satellites, la relativité restreinte prédit que les horloges embarquées retardent par rapport aux horloges au sol d'environ 5 nanosecondes par minute.

La désynchronisation est également due à un effet de décalage gravitationnel (une horloge en haut d'une tour avance par rapport à celle en bas de la tour) prédit par la relativité générale. Pour une orbite de 20'000 km d'altitude, les horloges embarquées avancent par rapport aux horloges au sol d'environ 32 nanosecondes par minute.

Nous constatons qu'en tenant compte des deux effets, nous arrivons à la conclusion que les horloges embarquées avancent par rapport aux horloges au sol d'environ 27 nanosecondes par minute.

Pour l'altitude de 20'000 km, l'effet de décalage gravitationnel est prépondérant. En revanche, pour une altitude basse comme celle de la navette spatiale (quelques centaines de kilomètres) c'est la désynchronisation due à la vitesse qui domine.

Il existe une altitude pour laquelle les deux effets se compensent exactement, c'est-à-dire pour laquelle les horloges des satellites restent synchronisées avec les horloges au sol. A environ 3'000 km, les horloges des satellites restent synchronisées avec les horloges placées au centre de la Terre.

Pour le futur système de navigation européen Galileo, les satellites graviteront à 30'000 km d'altitude. C'est donc l'effet gravitationnel qui sera le plus important mais les corrections à appliquer seront différentes des corrections calculées pour une altitude de 20'000 km.

¹⁵ *Universal Time Coordinated*

En conclusion, nous constatons qu'il est indispensable d'étudier la théorie de la relativité d'Einstein pour comprendre le fonctionnement du système GPS. Ce que nous allons entreprendre dans la suite de ce cours.

CHAPITRE 2

Relativité restreinte

Ces notes de cours concernant la théorie de la relativité restreinte d'A. Einstein (1905) ont été rédigées pour un cours de formation continue destiné aux enseignants en mathématiques et en physique (cours PO-14502, vendredi 17 avril 2015, reporté au 22 avril 2016, cours PO-15502). Elle sont également adaptées à des élèves du cours d'OS physique de quatrième année au collège de Genève (en laissant éventuellement tomber certains développements nécessitant quelques notions d'algèbre linéaire). L'idée est d'introduire les bases nécessaires au calcul des effets relativistes dont il faut tenir compte pour garantir le bon fonctionnement du système de géolocalisation GPS (Global Positioning System), y compris les effets du champ de gravitation, dans l'approximation d'un espace plat comme l'a fait Einstein dans son article de 1907.

1. Vitesse de la lumière

1. Introduction.

Imaginons une personne dans une pièce sombre face à un miroir situé à quelques mètres en face d'elle. La personne allume une lampe de poche en direction du miroir. Son visage est-il instantanément éclairé par la lumière réfléchiée par le miroir ? La réponse est non ! Le délai entre le moment où la lampe s'allume et l'instant où le visage est éclairé est certes très court (et de fait imperceptible) mais il n'est pas nul. La lumière ne se propage pas instantanément, elle se déplace à une vitesse finie !

La vitesse de la lumière est notée c et vaut

$$c = \boxed{299\,792\,458 \text{ m/s}} \approx 3 \cdot 10^8 \text{ m/s} = 300'000 \text{ km/s}$$

L'histoire de la mesure de cette vitesse pourrait faire l'objet d'un cours d'histoire des sciences. C'est à Empédocle d'Agrigente (Sicile, ~490-435 av. J.-C.) qu'on attribue les premières spéculations concernant la finitude de la vitesse de la lumière. Les premières estimations expérimentales datent du XVIIe siècle et sont obtenues par un astronome danois, Ole Christensen Rømer (1644-1710), grâce à l'observation des éclipses d'un satellite de Jupiter.

Les premières mesures non astronomiques datent du XIXe siècle (1849) et sont dues au physicien français Hippolyte Fizeau (1819-1896). La méthode de Fizeau consiste à couper un faisceau lumineux au moyen d'une roue dentée tournante. La lumière passe entre deux dents de la roue, parcourt un trajet de 8630 m (entre Montmartre et le mont Valérien) avant d'être réfléchiée par un miroir et de revenir sur la roue. L'aller-retour mesure environ 17 km soit un temps de parcours d'environ

$$\frac{17000}{3 \cdot 10^8} \approx 5.7 \cdot 10^{-5} \text{ s} = 57 \mu \text{ s}$$

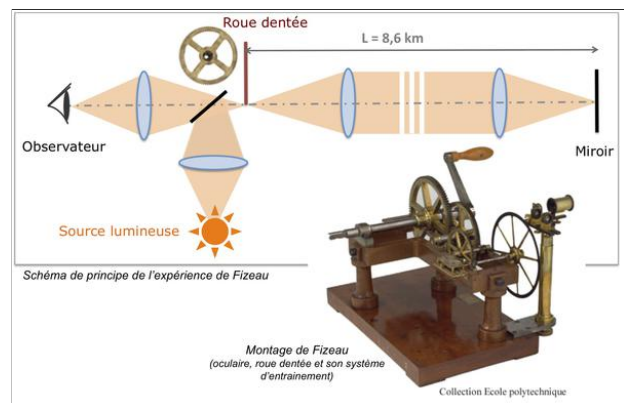


TABLEAU 1. D'Empédocle à Einstein.

La roue de Fizeau comprend 720 dents usinées au centième de millimètre près. L'idée est d'augmenter progressivement la vitesse de rotation de la roue jusqu'à obtenir une coupure du faisceau réfléchi. En effet, quand la vitesse est suffisamment élevée, le faisceau passant par une échancrure de la roue à l'aller tombe sur la dent suivante au retour. La première coupure du faisceau réfléchi s'observe à la période de rotation de

$$T = 5.7 \cdot 10^{-5} \cdot 2 \cdot 720 \approx 0.082 \text{ s}$$

soit une fréquence d'environ $\frac{1}{0.082} \approx 12$ tours par seconde. La principale difficulté expérimentale est le contrôle de la vitesse de rotation de la roue. Fizeau trouve $c \approx 313'000 \text{ km/s}$.



(Dessin et image: Institut d'Optique, Université Paris Sud)

2. Qu'est-ce que la lumière ?

En 1678, le physicien néerlandais Christian Huygens (1629-1695) construit une théorie dans laquelle la lumière est une onde. Cette théorie ondulatoire de la lumière s'oppose à la théorie corpusculaire de Newton et permet, contrairement à la théorie corpusculaire, d'expliquer le phénomène de biréfringence (l'indice de réfraction dépend de la direction de polarisation de l'onde lumineuse). Longtemps éclipsée notamment en raison de l'influence de Newton, la nature ondulatoire de la lumière est confirmée par les physiciens Augustin Jean Fresnel (1788-1827) et Thomas Young (1773-1829).

En 1865, le physicien écossais James Clerk Maxwell (1831-1879) publie sous la forme d'un système d'équations (initialement 20 équations à 20 inconnues, réduit par la suite par Heaviside à un système de 4 équations que nous verrons plus loin) une synthèse des diverses lois expérimentales concernant l'électricité et le magnétisme établies par ses prédécesseurs.

Dans la théorie de Maxwell, la lumière est une onde électromagnétique, au même titre que les ondes radio, décrites par ses équations. C'est le physicien allemand Heinrich Hertz (1857-1894) qui

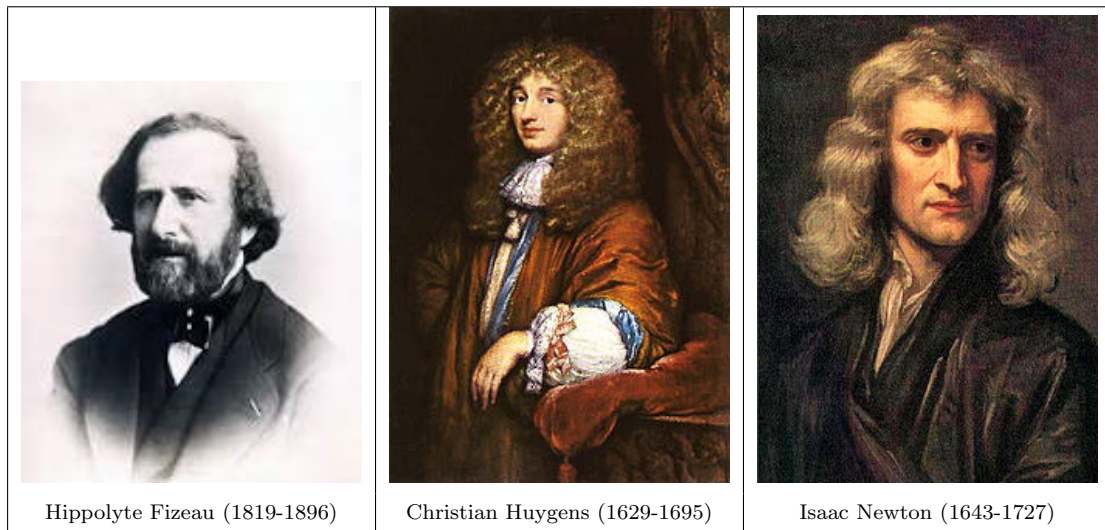


TABLEAU 2. D'Empédocle à Einstein.

confirme expérimentalement l'existence des ondes électromagnétique et montre qu'elle obéissent aux mêmes lois que la lumière.

3. L'éther.

Toutes les ondes connues au XIXe siècle se propagent dans un milieu: les ondes sonores dans l'air, les ondes marines dans l'eau. Dans sa théorie ondulatoire de la lumière, Huygens suppose que les ondes lumineuses se déplacent dans l'éther: c'est une substance hypothétique distincte de la matière dans laquelle l'univers est plongé. L'éther est supposé être au repos et représente un système de référence absolu dans lequel les corps et la lumière se meuvent et par rapport auquel la vitesse de la lumière est une constante universelle.

4. Expérience de Michelson et Morley.

Entre 1881 et 1887, Albert Michelson (1852-1931) et Edward Morley (1838-1923) font une série de mesures dont le but est de mettre en évidence l'existence de l'éther qui est supposé être le support matériel des ondes électromagnétiques comme la lumière.

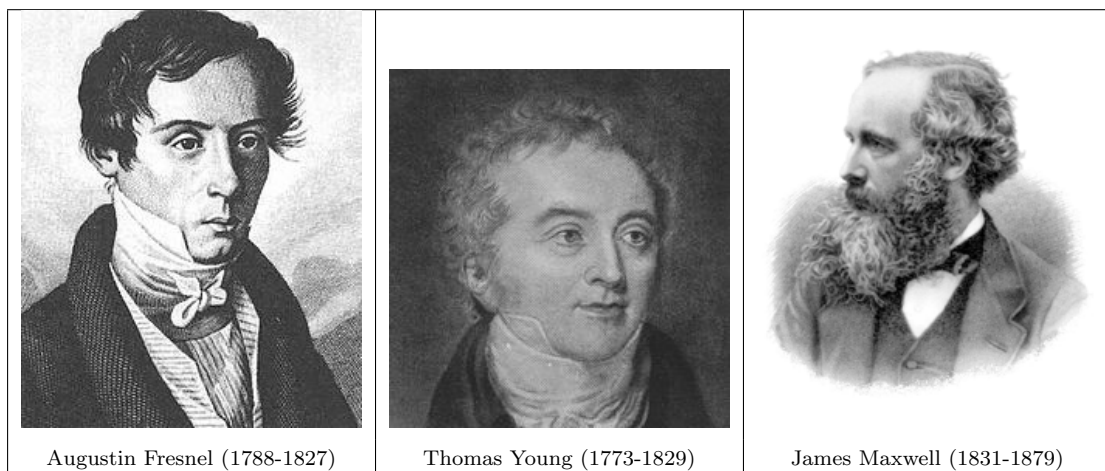


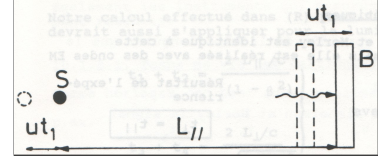
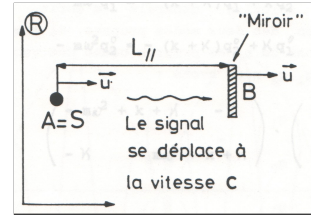
TABLEAU 3. D'Empédocle à Einstein.

Considérons un référentiel R fixe par rapport à l'éther dans lequel la lumière (les ondes électromagnétiques) se propage à la vitesse constante c . Imaginons un observateur S à distance L_{\parallel} d'un miroir. L'observateur et le miroir se déplacent à vitesse constante égale à u . Au temps $t = 0$, S émet un signal lumineux en direction du miroir. Le signal se reflète sur le miroir au temps $t = t_1$ et atteint l'observateur S au temps $t = t_{\parallel}$. En notant $t_2 = t_{\parallel} - t_1$, on trouve que

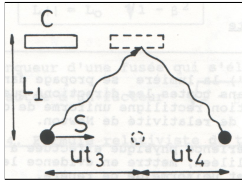
$$ct_1 = L_{\parallel} + ut_1 \text{ et } ct_2 = L_{\parallel} - ut_2$$

et

$$t_{\parallel} = t_1 + t_2 = \frac{L_{\parallel}}{c - u} + \frac{L_{\parallel}}{c + u} = \frac{L_{\parallel}2c}{c^2 - u^2} = \frac{2L_{\parallel}/c}{1 - \frac{u^2}{c^2}}$$



(Dessin: école de physique UNIGE)



(Dessin: école de physique UNIGE)

Considérons maintenant un deuxième miroir C à distance L_{\perp} de l'observateur S et se déplaçant également à vitesse u . Un signal lumineux émis par S met un temps t_3 pour atteindre le miroir C et un temps t_4 pour revenir du miroir à l'observateur. On trouve

$$ct_3 = \sqrt{L_{\perp}^2 + (ut_3)^2} \Rightarrow t_3 = \frac{L_{\perp}/c}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}} = t_4$$

Ainsi, le temps total t_{\perp} que met le signal pour faire l'aller-retour vaut

$$t_{\perp} = \frac{2L_{\perp}/c}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}}$$

Si $L_{\parallel} = L_{\perp} = L_0$, alors manifestement $t_{\parallel} \neq t_{\perp}$. De plus, remarquons que au premier ordre en $\frac{u^2}{c^2}$, il vient

$$t_{\perp} = \frac{2L_0/c}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}} = \frac{2L_0}{c} \left(1 + \frac{1}{2} \frac{u^2}{c^2} + \dots \right) \text{ et } t_{\parallel} = \frac{2L_0/c}{1 - \frac{u^2}{c^2}} = \frac{2L_0}{c} \left(1 + \frac{u^2}{c^2} + \dots \right)$$

et

$$t_{\parallel} - t_{\perp} = \frac{L_0}{c} \left(\frac{u^2}{c^2} + \dots \right) \approx L_0 \frac{u^2}{c^3}$$

Pour $L_0 = 10$ m et $u = 30$ km/s, on trouve

$$t_{\parallel} - t_{\perp} \approx 10 \cdot \frac{(3 \cdot 10^4)^2}{(3 \cdot 10^8)^3} \approx 3 \cdot 10^{-16} \text{ s} = 0.3 \text{ fs}$$

L'expérience de Michelson et Morley est identique à l'expérience imaginaire présentée ci-dessus. Le référentiel R est le référentiel héliocentrique (le centre est le soleil et les axes pointent vers trois étoiles éloignées). L'observateur S est le laboratoire de Michelson et Morley sur la Terre. La vitesse u de S est celle de la Terre autour du soleil, soit environ 30 km/s et la distance L_0 vaut 10 m. Nous avons vu que pour ces valeurs, $t_{\parallel} - t_{\perp}$ est de l'ordre de 0.3 femtosecondes, qui est un temps trop petit pour être mesuré directement.

Pour mettre en évidence la différence entre t_{\parallel} et t_{\perp} , Michelson et Morley utilisent un interféromètre de Michelson (voir figure 1). Remarquons que, en reprenant l'estimation donnée plus

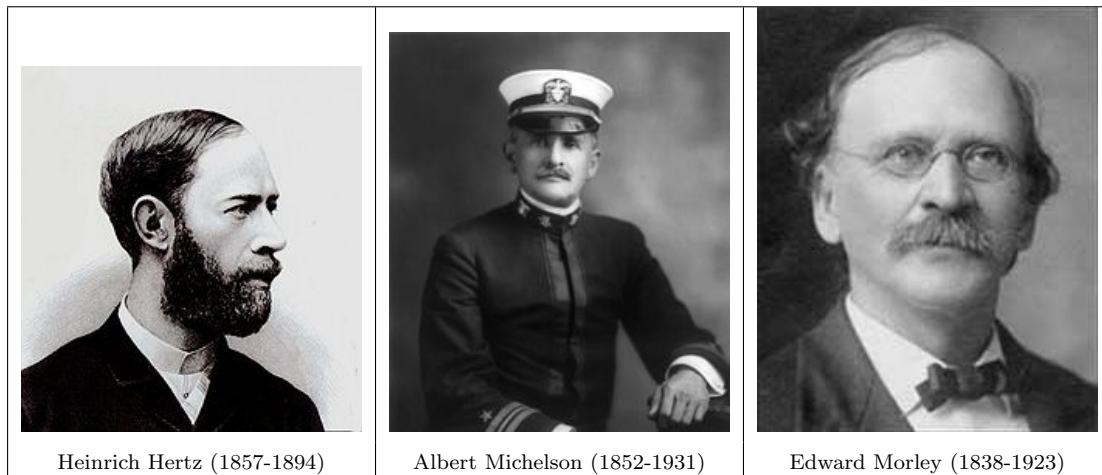


TABLEAU 4. D'Empédocle à Einstein.

haut,

$$c \cdot (t_{\parallel} - t_{\perp}) = L_0 \frac{u^2}{c^2} = 10 \frac{(3 \cdot 10^4)^2}{(3 \cdot 10^8)^2} = 10^{-7} \text{ m} = 100 \text{ nm}$$

Par exemple, dans le domaine du visible pour de la lumière avec une longueur d'onde de 500 nm (vert), la passage d'une frange sombre à une frange claire correspond à une différence de chemin optique de 250 nm. Le mouvement de la Terre dans l'éther provoquerait donc un décalage de 0.4 frange.

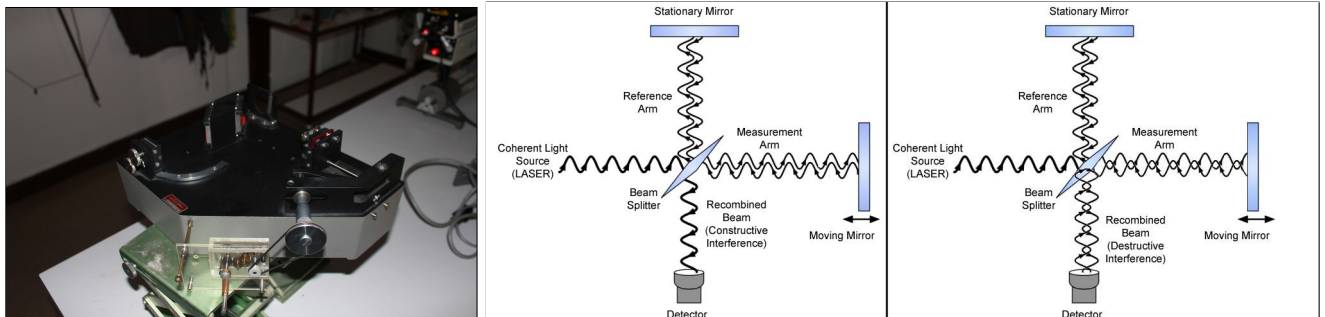


FIGURE 1. L'interféromètre de Michelson du collège de Candolle.

L'apparition de franges ne permet pas de conclure car il n'est pas possible de garantir que $L_{\parallel} = L_{\perp}$ à 100 nm près. Pour exclure les franges dues à ce manque de précision, il suffit de tourner l'appareil d'un quart de tour (voir figure 2). Malgré la finesse de l'expérience et les perfectionnements apportés ultérieurement, aucun effet d'interférence n'a pu être observé ce qui a amené Michelson et Morley à conclure: "S'il y a un mouvement relatif entre la Terre et l'éther lumineux, il doit être petit". Ils furent récompensés pour leurs travaux en 1907 par le prix Nobel.

5. Covariance galiléenne.

Un **repère d'inertie** ou repère **galiléen** est un repère dans lequel la première loi de Newton est vraie, c'est-à-dire dans lequel la vitesse d'un objet subissant une force résultante nulle est constante en direction et en intensité. Considérons par exemple un verre posé sur une table d'un

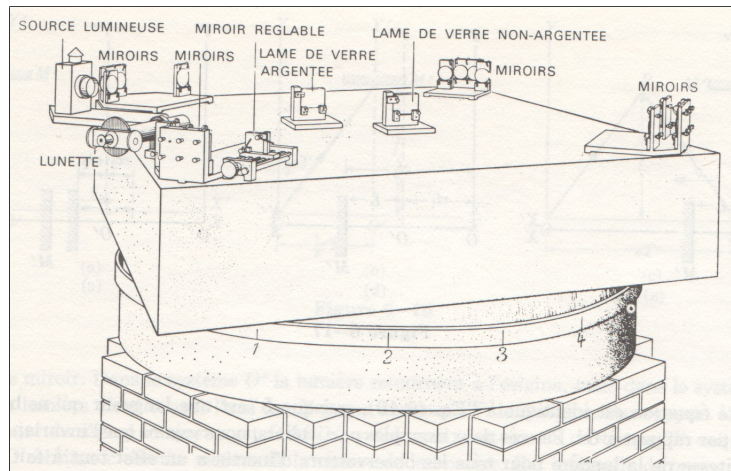
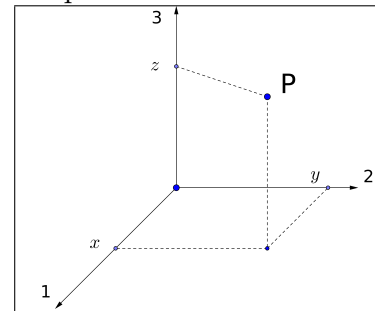


FIGURE 2. (Dessin: Scientific American, Alonso-Finn) Interféromètre utilisé par Michelson et Morley: une table de grès est fixée à un disque de bois qui flotte sur du mercure. La série de miroirs sert à augmenter le chemin optique total.

train se déplaçant en ligne droite et à vitesse constante. Si le train aborde une courbe serrée, le verre va se déplacer sur la table. Le train dans le virage n'est pas un repère d'inertie.

Pour décrire mathématiquement la position d'un objet ponctuel dans l'espace, il faut choisir un **référentiel**, c'est-à-dire une origine (un point) et trois axes (trois droites) orientés (et généralement perpendiculaires), numérotés de 1 à 3, se coupant à l'origine. L'orientation des axes est choisie généralement de telle sorte que si on met le pouce de la main droite le long de l'axe 1 et les autres doigts le long de l'axe 2, alors l'axe 3 "sort" de la paume de la main (règle de la main droite).

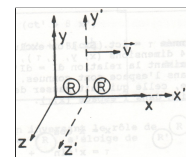


Un référentiel est dit

- **terrestre** si l'origine et les axes sont fixes par rapport au sol,
- **géocentrique** si l'origine est au centre de la Terre et l'orientation est déterminée par trois étoiles suffisamment lointaines pour sembler immobiles (étoiles fixes),
- **héliocentrique** si l'origine est au centre du soleil et l'orientation des axes est déterminée par trois étoiles fixes.

Un repère terrestre peut être considéré en bonne approximation comme un repère galiléen si l'on peut négliger la rotation de la Terre sur elle-même. Par exemple, il faut une hauteur de chute importante pour observer une déviation vers l'est. Pour tenir compte de cette rotation, il faut introduire une force fictive appelée force de Coriolis. De même, un repère géocentrique est en bonne approximation un repère galiléen si l'on peut négliger la rotation de la Terre autour du soleil.

Considérons un train se déplaçant en ligne droite à vitesse constante v traversant une gare. Considérons un référentiel terrestre R attaché à la gare et un référentiel R' attaché au train ainsi qu'un observateur S sur le quai de la gare et un observateur S' dans le train.



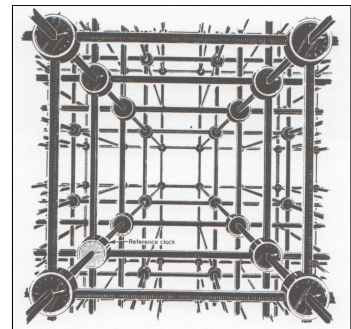
(Dessin: école de Physique UNIGE)

L'expérience montre que si la vitesse du train est constante, rien ne permet de privilégier le référentiel R au référentiel R' : les lois de la physique dans R et R' sont les mêmes, toutes les

expériences mené par S et S' se déroulent exactement de la même façon. C'est la **principe de Galilée** énoncé par Galilée en 1629 dans son ouvrage intitulé "Dialogo sopra i due massimi sistemi del mondo" ("Dialogue sur les deux grands systèmes du monde", *i.e.* le système de Ptolémée et celui de Copernic) dont voici un extrait:

"Enfermez-vous avec un ami dans la plus grande cabine sous le pont d'un grand navire et prenez avec vous des mouches, des papillons et d'autres petites bêtes qui volent; munissez-vous aussi d'un grand récipient rempli d'eau avec de petits poissons; accrochez aussi un petit seau dont l'eau coule goutte à goutte dans un autre vase à petite ouverture placé en dessous. Quand le navire est immobile, observez soigneusement comme les petites bêtes qui volent vont à la même vitesse dans toutes les directions de la cabine; on voit les poissons nager indifféremment de tous les côtés, les gouttes qui tombent entrent toutes dans le vase placé dessous ; si vous lancez quelque chose à votre ami, vous n'avez pas besoin de jeter plus fort dans une direction que dans une autre lorsque les distances sont égales (...). Quand vous aurez soigneusement observé cela, bien qu'il ne fasse aucun doute que les choses doivent se passer ainsi quand le navire est immobile, faites aller le navire à la vitesse que vous voulez ; pourvu que le mouvement soit uniforme, sans balancement dans un sens ou dans l'autre, vous ne remarquerez pas le moindre changement dans tous les effets qu'on vient d'indiquer ; aucun ne vous permettra de vous rendre compte si le navire est en marche ou immobile"

Imaginons que le repère R soit muni d'un réseau de détecteurs (par exemple sur les sommets d'un réseau cubique de 1 m de côté), chacun équipé d'une montre. Une explosion se produit. Elle est détectée par un détecteur du réseau qui transmet à l'observateur S ses coordonnées (notées $\vec{x} = (x_1, x_2, x_3)$) et le temps indiqué par sa montre au moment de la détection (noté t). Imaginons que le repère R' soit muni d'un réseau similaire. Notons $\vec{x}' = (x'_1, x'_2, x'_3)$ et t' les informations reçues par l'observateur S' par le détecteur du réseau du repère R' ayant détecté la même explosion.



L'expérience montre que si la vitesse v du référentiel R' est petite relativement à celle de la lumière, les données reçues par S et S' sont reliées par une **transformation de Galilée pure**:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ t' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -v \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix}$$

si les origines des référentiels R et R' sont confondues au temps $t = 0$

Si la vitesse du référentiel R' n'est pas parallèle à l'axe x du référentiel R mais est donnée par un vecteur $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$, alors

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ t' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -v_1 \\ 0 & 1 & 0 & -v_2 \\ 0 & 0 & 1 & -v_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix}$$

Si de plus les axes du référentiel R' ne sont pas parallèles aux axes du référentiel R mais les coordonnées d'un point dans le référentiel R' sont obtenues par une rotation $\vec{x}' = \mathcal{R}\vec{x}$ quand les

origines de R et R' sont confondues, alors

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ t' \end{pmatrix} = \left(\begin{array}{c|c} \mathcal{R} & \begin{matrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{matrix} \\ \hline 0 & 1 \end{array} \right) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -v_1 \\ 0 & 1 & 0 & -v_2 \\ 0 & 0 & 1 & -v_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix}$$

Finalement, si au temps $t = 0$, l'origine du référentiel R' se trouve en $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$ et les montres du référentiels R' indiquent un temps t_0 , alors

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ t' \end{pmatrix} = \left(\begin{array}{c|c} \mathcal{R} & \begin{matrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{matrix} \\ \hline 0 & 1 \end{array} \right) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -v_1 \\ 0 & 1 & 0 & -v_2 \\ 0 & 0 & 1 & -v_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ t_0 \end{pmatrix}$$

L'ensemble de toutes les transformations de ce type forme le **groupe de Galilée**.

6. Invariance de la vitesse de la lumière.

En 1905, Einstein propose une solution radicale aux problèmes soulevés par l'expérience de Michelson et Morley:

- l'éther n'existe pas,
- tous les référentiels galiléens sont équivalents pour exprimer les lois de la physique (principe d'invariance galiléenne),
- la lumière se propage dans le vide en ligne droite à la vitesse constante c (égale à 299'792'458 m/s ⁽¹⁾) quel que soit le référentiel galiléen considéré.

Imaginons un tram des TPG roulant à la vitesse de 20 km/h. A l'intérieur du tram, un contrôleur se déplace en direction de l'avant du tram à la vitesse de 5 km/h. Un passant se trouve à la place du Molard et observe passer le tram. Il mesure la vitesse du contrôleur. Que trouve-t-il ? Réponse: 20+5=25 km/h. Les vitesses s'additionnent. De même, si le contrôleur se déplace vers l'arrière du tram, notre quidam mesure la vitesse du contrôleur et trouve 20 - 5 = 15 km/h.

Imaginons maintenant que le contrôleur soit à l'arrière du tram. Il allume une lampe de poche (ou un laser) en direction de l'avant du tram. Le faisceau est réfléchi sur un miroir placé à l'avant du tram et revient en direction du contrôleur. Il peut ainsi mesurer la vitesse de la lumière avec un bon chronomètre ! Il trouve $c = 300'000$ km/s. Imaginons que le passant mesure depuis la place du Molard la vitesse du même faisceau. Que trouve-t-il ? En reprenant l'exemple du contrôleur, on pourrait penser qu'il trouve 300'000 km/s plus les 20 km/h du tram. Il n'en est rien ! L'observateur extérieur mesure également pour la vitesse du faisceau 300'000 km/s, indépendamment de la vitesse du tram. Ce phénomène est connu sous le nom d'**invariance de la vitesse de la lumière**.

Au lieu de mesurer directement la vitesse du faisceau de la lampe du contrôleur, notre quidam peut plus simplement comparer la vitesse du faisceau du contrôleur à celle d'un faisceau issu d'une lampe de poche qu'il allume au moment où le contrôleur passe à côté de lui. On peut imaginer que le contrôleur allume sa lampe au moment où il dépasse le passant. Les deux faisceaux avancent alors en parallèle exactement à la même vitesse.

¹En comptant le nombre de lettres de chaque mot de la phrase "La constante lumineuse restera désormais là, dans votre cervelle." on obtient 299 792 458

7. Le Bureau International des Poids et Mesures.

Depuis 1983, le Bureau International des Poids et Mesures situé dans le parc de Saint-Cloud près de Paris (BIPM: <http://www.bipm.org>) tient compte du principe d'invariance de la vitesse de la lumière dans le vide pour la définition du mètre:

“ Le **mètre** est la longueur du trajet parcouru dans le vide par la lumière pendant une durée de $1/299\,792\,458$ de seconde. ”

La seconde est définie par la fréquence d'une onde électromagnétique émise par un atome de césium 133:

“ La **seconde** est la durée de $9\,192\,631\,770$ périodes de la radiation correspondant à la transition entre les deux niveaux hyperfins de l'état fondamental de l'atome de césium 133. ”

La masse se mesure avec une balance à plateaux par comparaison avec la masse du prototype international du kilogramme conservé au BIPM.

“ Le **kilogramme** est l'unité de masse ; il est égal à la masse du prototype international du kilogramme. ”

Finalement, rappelons la définition de l'ampère:

“ L'ampère est l'intensité d'un courant constant qui, maintenu dans deux conducteurs parallèles, rectilignes, de longueur infinie, de section circulaire négligeable et placés à une distance de 1 mètre l'un de l'autre dans le vide, produirait entre ces conducteurs une force égale à 2×10^{-7} newton par mètre de longueur. ”

2. Dilatation du temps et contraction des longueurs

Reprenons l'expérience du tram. Supposons qu'il roule à vitesse constante u . Le contrôleur se trouve à l'arrière du tram et un miroir est placé à l'avant du tram à distance L'_{\parallel} . Un autre miroir est placé au-dessus du contrôleur à distance L'_{\perp} (voir figure 3).

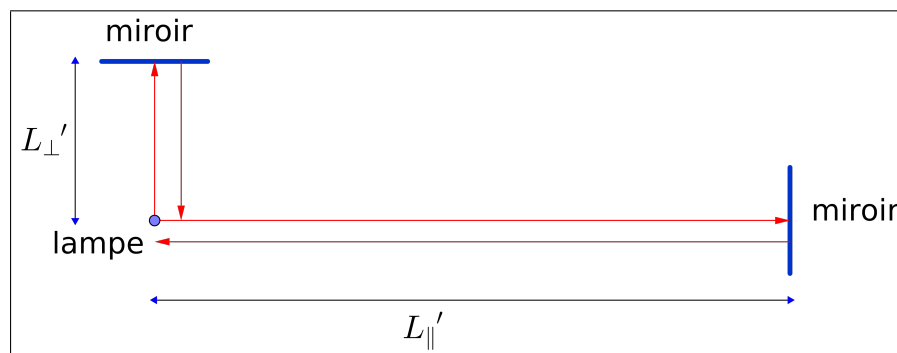


FIGURE 3. Expérience du tram dans le référentiel R' du tram.

Il allume sa lampe de poche en direction de l'avant du tram où se trouve un miroir. La lumière se réfléchit sur le miroir et revient vers le contrôleur. Il mesure le temps que met la lumière pour aller au miroir et trouve t'_1 et le temps que met la lumière pour revenir et trouve t'_2 . Il procède ensuite à une deuxième expérience similaire avec le miroir du haut (voir figure 4). Il trouve des temps t'_3 et t'_4 . En vertu du principe d'invariance de la vitesse de la lumière, le contrôleur trouve

$$t'_1 = t'_2 = \frac{L'_{\parallel}}{c} \text{ et } t'_3 = t'_4 = \frac{L'_{\perp}}{c} \Rightarrow t'_{\parallel} = t'_1 + t'_2 = \frac{L'_{\parallel}}{c} \text{ et } t'_{\perp} = t'_3 + t'_4 = \frac{2L'_{\perp}}{c}$$

Un passant regarde le tram passer depuis la place du Molard et mesure la vitesse des faisceaux lumineux. Il mesure des longueur L_{\parallel} et L_{\perp} pour la longueur et la hauteur du tram. En vertu du principe d'invariance de la vitesse de la lumière, il trouve

$$ct_1 = L_{\parallel} + ut_1 \Rightarrow t_1 = \frac{L_{\parallel}}{c - u}, \quad ct_2 = L_{\parallel} - u \cdot t_2 \Rightarrow t_2 = \frac{L_{\parallel}}{c + u} \Rightarrow t_{\parallel} = t_1 + t_2 = \frac{\frac{2L_{\parallel}}{c}}{1 - \frac{u^2}{c^2}}$$

$$(ct_3)^2 = (ut_3)^2 + L_{\perp}^2 \Rightarrow t_3 = t_4 = \frac{\frac{L_{\perp}}{c}}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}} \Rightarrow t_{\perp} = t_3 + t_4 = \frac{\frac{2L_{\perp}}{c}}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}}$$

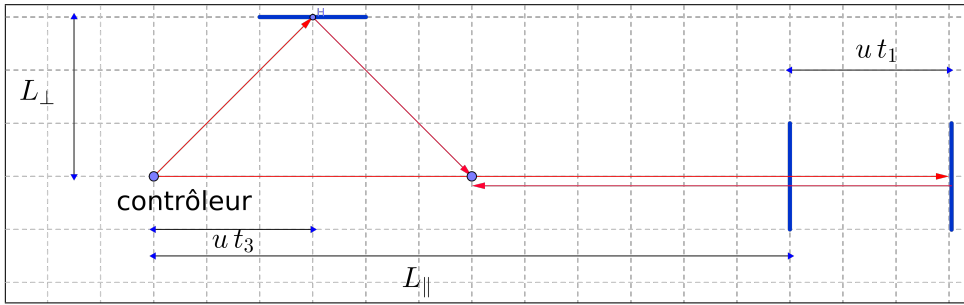


FIGURE 4. Expérience du tram dans le référentiel R de la place du Molard.

1. Contraction des longueurs.

Nous verrons que

$$L'_{\perp} = L_{\perp}$$

Dans le cas où $L'_{\parallel} = L'_0 = L'_{\perp}$, l'expérience de Michelson et Morley montre que

$$t_{\parallel} = t_{\perp} \Rightarrow \frac{\frac{2L_{\parallel}}{c}}{1 - \frac{u^2}{c^2}} = \frac{\frac{2L_{\perp}}{c}}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}} \Rightarrow L_{\parallel} = L'_{\perp} \sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}$$

c'est-à-dire, en notant $\beta = \frac{u}{c}$,

$$L_{\parallel} = L'_{\parallel} \sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}} = L'_{\parallel} \sqrt{1 - \beta^2}$$

La longueur du tram apparaît contractée d'un facteur $\sqrt{1 - \beta^2}$.

2. Dilatation des durées.

Comme $L_{\perp} = L'_{\perp}$, nous trouvons que

$$t_{\perp} = \frac{t'_{\perp}}{\sqrt{1 - \beta^2}}$$

Plus généralement, si le contrôleur mesure la durée d'un phénomène dans le tram et trouve un temps t' , alors l'observateur sur la place du Molard qui mesure la durée du même phénomène trouve un temps t donné par

$$t = \frac{t'}{\sqrt{1 - \beta^2}}$$

En effet, le contrôleur peut utiliser comme base de temps pour son horloge le temps mis pour un aller-retour par le faisceau lumineux vertical. En raison du principe de relativité, il n'est pas possible de mettre en évidence, par une expérience, le mouvement du tram et donc toutes les horloges à l'intérieur du tram resteront synchronisées avec l'horloge cadencée par les aller-retour du faisceau vertical.

En résumé, l'observateur sur la place du Molard voit tous les phénomènes à l'intérieur du tram se dérouler au ralenti, alors que pour le contrôleur, tout se passe normalement.

3. Le cas des satellites GPS

Comme nous l'avons vu, à une altitude de 20'000 km, l'horloge embarquée d'un satellite GPS a une vitesse d'environ $v = 3890$ m/s. Elle retarde donc par rapport à une horloge immobile au centre de la Terre de

$$\begin{aligned} t_s = t_0 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} &\Rightarrow t_s - t_0 = t_0 \left(\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} - 1 \right) \approx t_0 \left(1 - \frac{1}{2} \frac{v^2}{c^2} - 1 \right) \\ &= -\frac{1}{2} \frac{v^2}{c^2} \approx -8.4 \cdot 10^{-11} \text{ s par seconde} \end{aligned}$$

La vitesse d'une horloge à la surface de la Terre à l'équateur vaut

$$v_e = \frac{2\pi \cdot 6.37 \cdot 10^6}{24 \cdot 3600} \approx 463 \text{ m/s}$$

Par conséquent, une horloge à la surface de la Terre à l'équateur retarde par rapport à une horloge immobile au centre de la Terre de

$$-\frac{1}{2} \frac{(463)^2}{(3 \cdot 10^8)^2} \approx 1.19 \cdot 10^{-12} \text{ s par seconde}$$

Le décalage entre une horloge embarquée et une horloge à la surface de la Terre à l'équateur s'obtient par simple soustraction. L'horloge embarquée retarde au bout d'une minute d'environ 5 nanosecondes.

1. Vérifications expérimentales de la dilatation des durées.

2. Expériences de type Hafele-Keating.

Comme nous l'avons vu, la première horloge atomique fonctionnelle voit le jour en 1955, année de la mort d'Einstein, et ouvre la voie, grâce à sa précision formidable, aux expériences de type Hafele-Keating. En 1971, Hafele et Keating font voler un ensemble de 4 horloges atomiques au césium 133 sur deux avions commerciaux effectuant un tour complet de la Terre, l'un se dirigeant vers l'est (voyage de 41 heures) et l'autre vers l'ouest (voyage de 49 heures), en suivant approximativement une ligne équatoriale. Les résultats sont en bon accord avec les prédictions de la relativité restreinte.

Pour calculer les prédictions de la relativité restreinte, il faut prendre quelques précautions. Il faut raisonner par rapport au référentiel ECI² qui est un référentiel d'inertie dont l'origine coïncide avec le centre de la Terre mais qui ne tourne pas avec la Terre (ses axes sont fixes par rapport aux étoiles lointaines). Pour l'avion volant vers l'est, il faut ajouter à la vitesse de l'avion la vitesse

²Earth Centered Inertial

de rotation de la Terre et pour l'avion volant vers l'ouest, il faut soustraire la vitesse de rotation de la Terre.

Par rapport au référentiel ECI, la vitesse de l'avion vaut

$$\begin{aligned} \Omega R \cos(\lambda) + v \text{ s'il va vers l'est} \\ \Omega R \cos(\lambda) - v \text{ s'il va vers l'ouest} \end{aligned}$$

où $v > 0$ est la vitesse de l'avion par rapport au sol, R désigne le rayon de la Terre (supposée sphérique), Ω la vitesse angulaire de rotation de la Terre qui vaut environ $\frac{2\pi}{24 \cdot 3600}$ rad/s et λ est la latitude de la trajectoire de l'avion ($\lambda = 0$ si l'avion vol au-dessus de l'équateur). Remarquons que nous pouvons utiliser la formule newtonienne d'addition des vitesses en bonne approximation.

La période T_{avion} de l'oscillateur d'une horloge embarquée est donnée relativement à la période T_{ECI} de l'oscillateur d'une horloge immobile dans le repère ECI par (pour $\lambda = 0$)

$$\frac{T_{avion} - T_{ECI}}{T_{ECI}} = \sqrt{1 - \frac{(R\Omega \pm v)^2}{c^2}} - 1 \approx -\frac{(R\Omega \pm v)^2}{2c^2}$$

De même, la période $T_{equateur}$ de l'oscillateur d'une horloge sur le sol à l'équateur est donnée relativement à T_{ECI} par

$$\frac{T_{equateur} - T_{ECI}}{T_{ECI}} = \sqrt{1 - \frac{(R\Omega)^2}{c^2}} - 1 \approx -\frac{(R\Omega)^2}{2c^2}$$

Par conséquent,

$$\frac{T_{avion} - T_{equateur}}{T_{ECI}} = -\frac{(R\Omega \pm v)^2}{2c^2} + \frac{(R\Omega)^2}{2c^2} = -\frac{v^2}{2c^2} - \frac{\pm v R \Omega}{c^2}$$

A cette correction prédite par la relativité restreinte (conséquence du mouvement), il faut ajouter la correction prédite par la relativité générale (conséquence du potentiel gravitationnel). Nous verrons au chapitre suivant comment calculer cette correction. Notons Δt_{avion} la durée du vol indiquée par l'horloge embarquée et $\Delta t_{equateur}$ la durée indiquée par l'horloge au sol. Alors, on trouve

$$\Delta t_{avion} = \Delta t_{equateur} \left(1 - \frac{v^2}{2c^2} - \frac{v R_T \Omega \cos(\lambda)}{c^2} + \frac{ga}{c^2} \right)$$

où $g \approx 9.8 \text{ m/s}^2$ et a désigne l'altitude de l'avion (par rapport à l'horloge au sol) et $R_T \approx 6.37 \cdot 10^6 \text{ m}$ est le rayon de la Terre. C'est la formule utilisée par Hafele et Keating.

Remarquons que l'écart mesuré va varier en fonction de la direction empruntée par l'avion. En fait, les horloges ayant voyagé vers l'est accusent un retard par rapport aux horloges au sol, tandis que celles ayant voyagé vers l'ouest sont en avance à leur retour.

La correction due au mouvement se décompose en deux termes. Le premier est proportionnel à $\frac{v^2}{c^2}$. On le qualifie souvent d'effet Doppler du second ordre, bien qu'il ne s'agisse pas d'un pur effet Doppler qui ne serait qu'apparent. Le second est proportionnel à $\frac{v}{c^2}$ et qui est dépendant de la direction du vol. Cet effet est appelé l'effet Sagnac, sur lequel nous reviendrons.

Les données des vols sont (approximativement)

$$v = 830 \text{ km/h}, R = 6.37 \cdot 10^6 \text{ m}, a = 10'000 \text{ m}, c = 3 \cdot 10^8 \text{ m/s}, g = 9.8 \text{ m/s}^2$$

Les résultats de l'expérience se trouvent dans le tableau suivant:

Effet relativiste	vers l'est	vers l'ouest
Décalage gravitationnel	+144 ns	+179 ns
Doppler du second ordre	-51 ns	-47 ns
Effet Sagnac	-133 ns	+143 ns
Ecart total théorique	-40 ± 23 ns	$+275 \pm 21$ ns
Ecart total mesuré	-59 ± 10 ns	$+273 \pm 7$ ns

Les marges d'incertitude pour les écarts théoriques proviennent des incertitudes sur les paramètres de vol (position et vitesse).

Une expérience similaire a été menée en 1975 dont le but était de mesurer plus précisément l'effet gravitationnel sur les horloges. L'avion vola à 5 reprises pour une durée totale de 15 heures à une vitesse n'excédant pas 450 km/h pour minimiser l'effet Doppler du second ordre et le long d'une trajectoire en forme de huit dans le but d'éliminer l'effet Sagnac.

3. Désintégration de muons.

Comme horloges, on peut utiliser des particules instables. Soit N_0 le nombre de particules à l'instant $t = 0$ et $N(t)$ le nombre de particules ayant survécu jusqu'à l'instant t . Expérimentalement, on a:

$$N(t) = N_0 e^{-\lambda t}$$

Le nombre $n(t)$ d'atomes qui se sont désintégrés pendant la durée t est donc

$$n(t) = N_0 - N(t) = N_0 (1 - e^{-\lambda t})$$

et la probabilité qu'un atome se désintègre durant un laps de temps t vaut

$$P(0 \leq X \leq t) = 1 - e^{-\lambda t}$$

Le processus de désintégration est un phénomène "sans mémoire". On définit alors la durée de vie moyenne par

$$\tau = \int_0^{\infty} t \lambda e^{-\lambda t} dt = \frac{1}{N_0} \int_0^{\infty} N(t) dt = \int_0^{\infty} e^{-\lambda t} dt = \frac{1}{\lambda}$$

On définit aussi le temps de demi-vie par

$$N(T_{1/2}) = \frac{N_0}{2} \Rightarrow T_{1/2} = \frac{\ln(2)}{\lambda} = \ln(2)\tau$$

Rappelons que si $X > 0$ est une variable aléatoire de densité de probabilité f , c'est-à-dire

$$f(x) \geq 0, f(x) = 0 \text{ si } x < 0, \int_0^{\infty} f(x) dx = 1 \text{ et } P(a \leq X \leq b) = \int_a^b f(x) dx$$

telle que

$$P(X > s + t | X > t) = P(X > s) \quad \forall s, t$$

alors

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ \lambda e^{-\lambda x} & \text{si } x \geq 0 \end{cases} \quad \text{où } E(X) = \int_0^{\infty} x f(x) dx = \frac{1}{\lambda}$$

L'hypothèse sur la probabilité conditionnelle s'interprète ainsi: la probabilité que le phénomène dure au moins $s + t$ secondes sachant qu'il a déjà duré t secondes est égale à la probabilité qu'il

du moins s secondes. En d'autres termes, le fait que le phénomène ait duré pendant t heures ne change rien à son espérance de vie à partir du temps t .

En effet, notons F la fonction de répartition de X :

$$F(x) = \int_0^x f(t) dt \text{ et } G(x) = 1 - F(x)$$

Alors, l'hypothèse sur la probabilité conditionnelle s'écrit:

$$\frac{G(s+t)}{G(t)} = G(s) \Rightarrow G(s+t) = G(s)G(t), \forall s, t$$

Par conséquent

$$\begin{aligned} \frac{G(s+t) - G(s)}{t} &= G(s) \frac{G(t) - 1}{t} \\ \Rightarrow G'(s) &= \lim_{t \rightarrow 0} G(s) \frac{G(t) - 1}{t} = G(s)G'(0) = G(s)(-F'(0)) = G(s)(-f(0)) \end{aligned}$$

c'est-à-dire

$$G'(s) = -\lambda G(s) \text{ et } G(0) = 1 \Rightarrow G(s) = e^{-\lambda s} \text{ et } -\lambda e^{-\lambda s} = -f(s)$$

Les muons sont des particules instables. Le muon a les mêmes propriétés physiques que l'électron mais une masse 207 fois plus grande. Le muon positif se désintègre en positron (électron positif) et neutrinos

$$\mu^+ \Rightarrow e^+ + \nu_e + \bar{\nu}_\mu$$

Le temps de vie du muon au repos a été mesuré. Il vaut

$$\tau_{\mu^+}^0 = 2.19711 \pm 0.00008 \mu s$$

Les muons sont produits au CERN dans un accélérateur de protons au moyen de la réaction

$$p \rightarrow \leftarrow p \Rightarrow p + n + \pi^+ \text{ et } \pi^+ \Rightarrow \mu^+ + \nu$$

On les stocke dans un anneau magnétique de 14 mètres de diamètre. Leur vitesse vaut

$$v_{\mu^+} = 0.99942 \cdot c$$

On mesure le temps de vie des muons à grande vitesse. On constate que le temps de vie des muons observé dans le laboratoire τ_L est donné par la formule

$$\tau_L = \frac{\tau_{\mu^+}^0}{\sqrt{1 - \frac{v_{\mu^+}^2}{c^2}}}$$

Cette expérience a été faite au CERN en 1977.

Motionnons que certaines particules détectées au sol et créées dans la haute atmosphère par des rayons cosmiques ont un temps de vie tellement court que malgré leur très grande vitesse elles ne seraient pas détectables au sol s'il n'y avait pas le phénomène relativiste de dilatation des durées. Les temps de vie observés de ces particules en mouvement dépassent leur temps de vie au repos d'un facteur 10.

4. Transformations de Lorentz

En 1905, Einstein publie plusieurs articles majeurs dont deux concernant la théorie de la relativité restreinte. Dans le premier (juin 1905) il montre qu'il est possible de fonder une nouvelle cinématique sur deux postulats et ainsi d'unifier la mécanique et l'électromagnétisme. Il montre aussi que l'on peut dériver de ces deux postulats l'ensemble des résultats déjà obtenus par Lorentz et Poincaré³. Il prédit également pour la première fois un effet inédit appelé plus tard le paradoxe des jumeaux. Le second article (septembre 1905) contient la célèbre formule $E = mc^2$ (en fait elle n'est pas explicitement écrite mais expliquée par une phrase).

La théorie de la relativité restreinte repose sur les deux principes suivants:

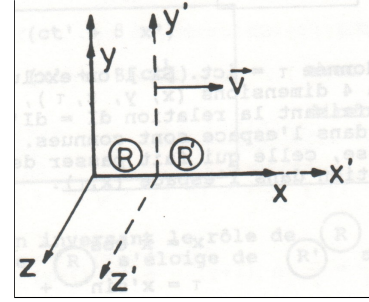
- (1) Tous les référentiels galiléens sont équivalents pour exprimer les lois de la nature.
- (2) La lumière se propage dans le vide en ligne droite à la vitesse constante $c = 299'792'458$ m/s quel que soit le référentiel galiléen considéré.



TABLEAU 5. D'Empédocle à Einstein.

³Lorentz et Poincaré cherchaient des transformations de coordonnées laissant invariantes les équations de Maxwell, en d'autres termes, des transformations de coordonnées telles que les équations de Maxwell s'écrivent de la même manière dans tous les référentiels galiléens

Nous allons maintenant, à partir des deux postulats de la relativité restreinte, dériver les transformations de Lorentz dites “propres et orthochrones”. Pour cela, nous considérons deux repères galiléens R et R' . Les axes des deux repères sont parallèles, le repère R' se déplace à vitesse constante v par rapport au repère R . Sa vitesse est parallèle à l'axe des x (voir figure ci-contre). Par ailleurs, nous supposons que quand les origines de R et R' coïncident, les horloges de R et R' sont synchronisées et mises à zéro, c'est-à-dire



(Dessin: école de Physique UNIGE)

$$\begin{pmatrix} t' \\ x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff \begin{pmatrix} t \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Notons $f_v : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$ la fonction qui associe aux coordonnées d'un événement observé dans le référentiel R les coordonnées du même événement observé dans le référentiel R' :

$$f : \begin{pmatrix} ct \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} ct' \\ x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1(ct, x, y, z) \\ f_2(ct, x, y, z) \\ f_3(ct, x, y, z) \\ f_4(ct, x, y, z) \end{pmatrix}$$

Cette fonction dépend de v . Pour $v = 0$, c'est l'identité.

4.1. Linéarité des transformations de Lorentz.

En vertu de l'hypothèse selon laquelle l'espace et le temps sont homogènes, nous pouvons supposer que

$$\boxed{f(\vec{s}_1 - \vec{s}_0) = f(\vec{s}_1) - f(\vec{s}_0) \forall \vec{s}_0, \vec{s}_1} \in \mathbb{R}^4$$

où nous avons noté

$$\vec{s}_j = \begin{pmatrix} ct_j \\ x_j \\ y_j \\ z_j \end{pmatrix}$$

En effet, l'homogénéité de l'espace signifie que f doit dépendre uniquement de la vitesse v , mais pas du choix de l'origine des repères utilisée pour attribuer des coordonnées aux événements. Si dans le référentiel R , nous choisissons \vec{s}_0 comme origine et dans le repère R' , $f(\vec{s}_0)$, alors l'événement \vec{s}_1 aura les coordonnées $\vec{s}_1 - \vec{s}_0$ dans R et $f(\vec{s}_1) - f(\vec{s}_0)$ dans R' et par conséquent, nous pouvons supposer que $f(\vec{s}_1 - \vec{s}_0) = f(\vec{s}_1) - f(\vec{s}_0)$.

Il suit de l'hypothèse qui précède que f préserve l'addition des vecteurs

$$f(\vec{s}_1 + \vec{s}_2) = f(\vec{s}_1) + f(\vec{s}_2) \forall \vec{s}_1, \vec{s}_2 \in \mathbb{R}^4$$

En effet,

$$f(\vec{0}) = f(\vec{s} - \vec{s}) = f(\vec{s}) - f(\vec{s}) = \vec{0} \text{ et } f(-\vec{s}) = f(\vec{0} - \vec{s}) = f(\vec{0}) - f(\vec{s}) = -f(\vec{s})$$

$$\Rightarrow f(\vec{s}_1 + \vec{s}_2) = f(\vec{s}_1 - (-\vec{s}_2)) = f(\vec{s}_1) - f(-\vec{s}_2) = f(\vec{s}_1) - (-f(\vec{s}_2)) = f(\vec{s}_1) + f(\vec{s}_2)$$

Nous supposons maintenant que f est dérivable en $\vec{0}$. Il suit de cette hypothèse et de la propriété concernant l'addition que f est dérivable partout et que sa dérivée est constante:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(\vec{s}_0 + h\vec{s}_1) - f(\vec{s}_0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(\vec{s}_0) + f(h\vec{s}_1) - f(\vec{s}_0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h\vec{s}_1)}{h}$$

ce qui montre que

$$f'(\vec{s}_0) = f'(\vec{0}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial t} & \frac{\partial f_1}{\partial x} & \frac{\partial f_1}{\partial y} & \frac{\partial f_1}{\partial z} \\ \frac{\partial f_2}{\partial t} & \frac{\partial f_2}{\partial x} & \frac{\partial f_2}{\partial y} & \frac{\partial f_2}{\partial z} \\ \frac{\partial f_3}{\partial t} & \frac{\partial f_3}{\partial x} & \frac{\partial f_3}{\partial y} & \frac{\partial f_3}{\partial z} \\ \frac{\partial f_4}{\partial t} & \frac{\partial f_4}{\partial x} & \frac{\partial f_4}{\partial y} & \frac{\partial f_4}{\partial z} \end{pmatrix} (\vec{0}) \forall \vec{s}_0$$

et que pour tout $\vec{s} \in \mathbb{R}^4$,

$$f(\vec{s}) = \underbrace{f(\vec{0})}_{=\vec{0}} + \int_0^1 f'(\vec{s}u) \vec{s} du = f'(\vec{0}) \vec{s}$$

ce qui montre que f est linéaire.

REMARQUE 4.1. Il est possible de se passer des deux hypothèses faites ici concernant l'addition des vecteurs et la dérivabilité de f pour montrer la linéarité de f . Il suffit de supposer que f est inversible et que f préserve "les cônes de lumière" (voir plus bas). Pour une démonstration, voir par exemple, le Théorème 1.4.1 p. 29 du livre intitulé *Spacetime* de Marcus Kriele (Springer, 1999).

REMARQUE 4.2. En vertu du premier principe, si un observateur S immobile dans le référentiel R voit une particule libre, c'est-à-dire sur laquelle aucune force n'agit, se déplacer en ligne droite, alors pour tout observateur S' immobile dans le référentiel R' la trajectoire de cette particule sera également une droite. Cela signifie que pour tout $\vec{v} \in \mathbb{R}^3$, il existe $\vec{v}' \in \mathbb{R}^3$ et une fonction réelle g telle que

$$f(ct, t\vec{v}) = (ct', t'\vec{v}') = (cg(ct), g(ct)\vec{v}') \forall t$$

Certains auteurs invoquent cet argument pour justifier la linéarité de f . Remarquons que cela ne suffit pas pour démontrer la linéarité de f .

4.2. Invariance de la vitesse de la lumière.

Nous supposons ensuite que

$$\boxed{y = 0 \Leftrightarrow y' = 0 \text{ et } z = 0 \Leftrightarrow z' = 0}$$

Ce qui revient à supposer que f ne doit pas dépendre du choix de l'orientation des axes y et z perpendiculaires à \vec{v} . Il suit de cette hypothèse que

$$f(\vec{s}) = L(v)\vec{s} \text{ avec } L(v) = \begin{pmatrix} L_{11} & L_{12} & 0 & 0 \\ L_{21} & L_{22} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Il reste maintenant à déterminer la sous-matrice 2×2 .

Nous utilisons maintenant le deuxième postulat d'Einstein. Supposons qu'au temps

$$t = t' = 0 \text{ quand les origines coïncident: } x = x' = y = y' = z = z' = 0$$

un flash lumineux soit émis depuis l'origine des référentiels dans toutes les directions. En vertu du deuxième postulat, dans les deux référentiels, le front d'onde du flash lumineux est une sphère d'équation

$$x^2 + y^2 + z^2 - c^2t^2 = 0 \text{ dans } R \text{ et } x'^2 + y'^2 + z'^2 - c^2t'^2 = 0 \text{ dans le référentiel } R'$$

c'est-à-dire

$$\vec{s}^\top g \vec{s} = 0 \text{ dans } R \text{ et } \vec{s}'^\top g \vec{s}' = 0 \text{ dans le référentiel } R'$$

où

$$g = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \vec{s}' = \begin{pmatrix} ct' \\ x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$$

En d'autres termes, le deuxième postulat implique que pour tout $\vec{s} \in \mathbb{R}^4$,

$$\vec{s}^\top g \vec{s} = 0 \Leftrightarrow \vec{s}'^\top g \vec{s}' = 0 \Leftrightarrow \vec{s}^\top [L(v)^\top g L(v)] \vec{s} = 0$$

On appelle cône de lumière l'ensemble des \vec{s} tels que $\vec{s}^\top g \vec{s} = 0$.

Définissons

$$n(v) = n(v, \vec{s}) = \begin{cases} 1 & \text{si } \vec{s}^\top g \vec{s} = 0 \\ \frac{\vec{s}^\top [L(v)^\top g L(v)] \vec{s}}{\vec{s}^\top g \vec{s}} & \text{si } \vec{s}^\top g \vec{s} \neq 0 \end{cases}$$

Alors, en vertu de ce qui précède,

$$\vec{s}^\top [L(v)^\top g L(v)] \vec{s} = n(v) (\vec{s}^\top g \vec{s})$$

Dans le référentiel R' , c'est le référentiel R qui se déplace à vitesse $-v$ le long de l'axe x' . Par conséquent, nous pouvons supposer que

$$\boxed{L(-v) = L(v)^{-1}}$$

Par ailleurs, en vertu de l'hypothèse selon laquelle l'espace est isotrope, nous pouvons également supposer que (pour tout \vec{s})

$$\boxed{n(-v) = n(v)}$$

Or,

$$\begin{aligned}
 L(-v)^\top [L(v)^\top g L(v)] L(-v) &= g \\
 \Rightarrow \vec{s}^\top g \vec{s} &= \vec{s}^\top [L(-v)^\top [L(v)^\top g L(v)] L(-v)] \vec{s} \\
 &= n(-v) \vec{s}^\top [L(v)^\top g L(v)] \vec{s} \quad \forall \vec{s} \\
 &= n(-v) n(v) \vec{s}^\top g \vec{s} \\
 \Rightarrow n(-v) n(v) &= n(v)^2 = 1 \Rightarrow n(v) = \pm 1 \quad \forall \vec{s}
 \end{aligned}$$

En supposant que (pour tout \vec{s}) $n(v)$ est une fonction continue en v , il suit de $n(0) = 1$ que $n(v) = 1$ pour tout v et donc que

$$g = L(v)^\top g L(v) \quad \forall v$$

Cette égalité implique notamment que

$$-1 = \det(g) = -\det(L(v))^2 \Rightarrow \det(L(v)) = \pm 1$$

En supposant que $L(v)$ est continue en v , il suit de $L(0) = I_4$ que

$$\det(L(v)) = 1$$

pour tout v (où I_4 désigne la matrice identité 4×4).

Les deux équations ci-dessus donnent

$$\det(L(v)) = 1 \Rightarrow L_{11}L_{22} - L_{21}L_{12} = 1$$

et

$$g = L(v)^\top g L(v)$$

$$\begin{aligned}
 \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} L_{11} & L_{21} & 0 & 0 \\ L_{12} & L_{22} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} L_{11} & L_{12} & 0 & 0 \\ L_{21} & L_{22} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} L_{11} & L_{21} & 0 & 0 \\ L_{12} & L_{22} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} L_{11} & L_{12} & 0 & 0 \\ -L_{21} & -L_{22} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} L_{11}^2 - L_{21}^2 & L_{11}L_{12} - L_{22}L_{21} & 0 & 0 \\ L_{11}L_{12} - L_{22}L_{21} & L_{12}^2 - L_{22}^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

c'est-à-dire

$$\begin{cases} L_{11}^2 - L_{21}^2 = 1 \\ L_{12}^2 - L_{22}^2 = -1 \\ L_{11}L_{12} - L_{22}L_{21} = 0 \end{cases}$$

Remarquons que l'origine du référentiel R se déplace à vitesse $-v$ dans le référentiel R' , par conséquent,

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} ct' \\ -vt' \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} L_{11} & L_{12} \\ L_{21} & L_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ct \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow ct' = L_{11}ct \text{ et } -vt' = L_{21}ct \\ &\Rightarrow L_{11} > 0 \text{ et } L_{21} = -\beta L_{11} \text{ où } \boxed{\beta = \frac{v}{c}} \end{aligned}$$

De même, l'origine du référentiel R' se déplace à vitesse v dans le référentiel R , par conséquent,

$$\begin{pmatrix} ct' \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} L_{11} & L_{12} \\ L_{21} & L_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ct \\ vt \end{pmatrix} \Rightarrow L_{21}ct + L_{22}vt \Rightarrow L_{21} = -\beta L_{22}$$

En résumé,

$$L_{22} = L_{11} \text{ et } L_{21} = -\beta L_{11}$$

Finalement, comme $\det(L(v)) = 1$, il suit que

$$1 = L_{11}L_{22} - L_{21}L_{12} = L_{11}^2 + \beta L_{11}L_{12} \Rightarrow L_{12} = \frac{1 - L_{11}^2}{\beta L_{11}}$$

De la première équation donnée ci-dessus, il suit que

$$L_{11}^2 - L_{21}^2 = 1 \Rightarrow L_{11}^2 - \beta^2 L_{11}^2 = 1 \Rightarrow L_{11} = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}} = \boxed{\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} =: \gamma}$$

et

$$\lambda(v) := \begin{pmatrix} L_{11} & L_{12} \\ L_{21} & L_{22} \end{pmatrix} = \gamma \begin{pmatrix} 1 & -\beta \\ -\beta & 1 \end{pmatrix}$$

c'est-à-dire

$$L(v) = \begin{pmatrix} \gamma & -\gamma\beta & 0 & 0 \\ -\gamma\beta & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

4.3. Rotations hyperboliques.

Les équations ci-dessus donnent

$$\begin{cases} L_{11}^2 = 1 + L_{21}^2 > 1 \\ L_{22}^2 = 1 + L_{12}^2 > 1 \end{cases}$$

Il suit que nous pouvons poser ($x > 0$)

$$L_{11} = (-1)^{n_1} \cosh(x) \text{ et } L_{22} = (-1)^{n_2} \cosh(y)$$

et ainsi

$$L_{21}^2 = \cosh(x)^2 - 1 = \sinh(x)^2 \Rightarrow L_{21} = (-1)^{k_1} \sinh(x)$$

et

$$L_{12}^2 = L_{22}^2 - 1 = \sinh(y)^2 \Rightarrow L_{12} = (-1)^{k_2} \sinh(y)$$

Finalement, la dernière équation donne

$$\begin{aligned} L_{11}L_{12} - L_{22}L_{21} &= (-1)^{n_1+k_2} \cosh(x) \sinh(y) - (-1)^{n_2+k_1} \cosh(y) \sinh(x) = 0 \\ &\Rightarrow \cosh(x) \sinh(y) + (-1)^{n_2+k_1+n_1+k_2+1} \cosh(y) \sinh(x) = 0 \end{aligned}$$

Rappelons que

$$\begin{aligned} \cosh(x) &= \frac{e^x - e^{-x}}{2}, \quad \sinh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \Rightarrow \cosh(x)^2 - \sinh(x)^2 = 1 \\ \text{et } \sinh(x \pm y) &= \sinh(x) \cosh(y) \pm \cosh(x) \sinh(y) \end{aligned}$$

Par conséquent,

$$x + (-1)^{n_1+n_2+k_1+k_2+1}y = 0 \Rightarrow \cosh(y) = \cosh(x) \text{ et } \sinh(y) = (-1)^{n_1+n_2+k_1+k_2} \sinh(x)$$

et

$$\begin{aligned} \lambda(v) &= \begin{pmatrix} (-1)^{n_1} \cosh(x) & (-1)^{n_1+n_2+k_1+k_2} (-1)^{k_2} \sinh(x) \\ (-1)^{k_1} \sinh(x) & (-1)^{n_2} \cosh(x) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} (-1)^{n_1} \cosh(x) & (-1)^{n_1+n_2+k_1} \sinh(x) \\ (-1)^{k_1} \sinh(x) & (-1)^{n_2} \cosh(x) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Il suit que

$$\det(\lambda(v)) = (-1)^{n_1+n_2} \cosh^2(x) - (-1)^{n_1+n_2} \sinh^2(x) = 1 \Rightarrow n_1 = n_2$$

et donc

$$\lambda(v) = (-1)^n \begin{pmatrix} \cosh(x) & (-1)^k \sinh(x) \\ (-1)^k \sinh(x) & \cosh(x) \end{pmatrix}$$

Les équations

$$L_{11} > 0 \text{ et } L_{21} = -\beta L_{22}$$

donnent $n = 0$ et $k = 1$. Par ailleurs, il suit de l'équation

$$\begin{aligned} L_{21} = -\beta L_{11} &\Rightarrow \sinh(x) = -\beta \cosh(x) \Rightarrow \sinh^2(x) = \beta^2 \cosh^2(x) = \beta^2 (1 + \sinh^2(x)) \\ &\Rightarrow \sinh(x) = \beta\gamma \text{ et } \cosh(x) = \gamma \end{aligned}$$

Remarquons que les valeurs propres de la matrice

$$l = \begin{pmatrix} \cosh(x) & -\sinh(x) \\ -\sinh(x) & \cosh(x) \end{pmatrix}$$

sont données par

$$\lambda^2 - 2\lambda \cosh(x) + 1 = 0 \Rightarrow \lambda = \cosh(x) \pm \sqrt{\cosh(x)^2 - 1} = \cosh(x) \pm \sinh(x) = e^{\pm x}$$

4.4. Diagrammes de Minkowski (1908).

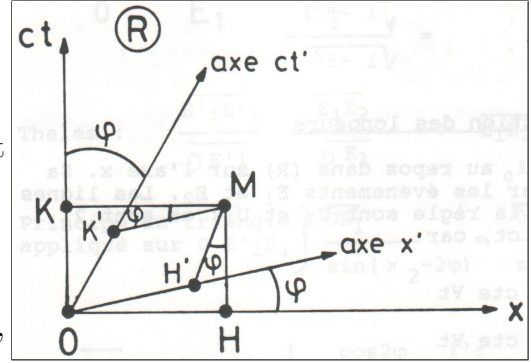
En tout point de l'axe x' , $ct' = 0$, c'est-à-dire

$$0 = ct' = \gamma(ct - \beta x) \Rightarrow ct = \beta x$$

C'est une droite de pente β dans R . De même, en tout point de l'axe ct' , on a $x' = 0$, c'est-à-dire

$$0 = x' = \gamma(-\beta ct + x) \Rightarrow ct = \frac{x}{\beta}$$

C'est une droite de pente $\frac{1}{\beta}$ dans R . Sur la figure ci-contre, $\tan(\varphi) = \beta$.



(Dessin: UniGE)

Un événement M de R est représenté par les coordonnées cartésiennes (ct, x) . Les coordonnées de cet événement dans R' sont trouvées en menant des parallèles aux axes x' et ct' .

Attention Les unités des axes x' et ct' ne sont pas les mêmes que celles des axes x et ct . En effet,

$$x = \overline{OH} = \overline{K'M} \cos(\varphi) + \overline{OK'} \sin(\varphi) = \overline{OH'} \cos(\varphi) + \overline{MH'} \sin(\varphi)$$

et

$$ct = \overline{OK} = \overline{K'M} \sin(\varphi) + \overline{OK'} \cos(\varphi) = \overline{OH'} \sin(\varphi) + \overline{MH'} \cos(\varphi)$$

Notons α le paramètre d'échelle

$$\alpha \overline{OH'} = x' \text{ et } \alpha \overline{OK'} = ct'$$

Ainsi,

$$x = \frac{1}{\alpha} (\cos(\varphi)x' + \sin(\varphi)ct') = \frac{1}{\alpha} \cos(\varphi) (x' + \tan(\varphi)ct') = \frac{1}{\alpha} \cos(\varphi) (x' + \beta ct')$$

et

$$ct = \frac{1}{\alpha} (\cos(\varphi)ct' + \sin(\varphi)x') = \frac{1}{\alpha} \cos(\varphi) (ct' + \tan(\varphi)x') = \frac{1}{\alpha} \cos(\varphi) (ct' + \beta x')$$

Mais, comme

$$\cos(\varphi) = \frac{1}{\sqrt{1 + \tan^2(\varphi)}} = \frac{1}{\sqrt{1 + \beta^2}}$$

et

$$\begin{pmatrix} ct' \\ x' \end{pmatrix} = \gamma \begin{pmatrix} 1 & -\beta \\ -\beta & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ct \\ x \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} ct \\ x \end{pmatrix} = \gamma \begin{pmatrix} 1 & \beta \\ \beta & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ct' \\ x' \end{pmatrix}$$

il vient,

$$x = \frac{1}{\alpha} \frac{1}{\sqrt{1 + \beta^2}} (x' + \beta ct') \stackrel{\text{Lorentz}}{=} \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}} (\beta ct' + x')$$

et

$$ct = \frac{1}{\alpha} \frac{1}{\sqrt{1 + \beta^2}} (ct' + \beta x') \stackrel{\text{Lorentz}}{=} \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}} (ct' + \beta x')$$

Par conséquent, le facteur d'échelle vaut

$$\alpha = \frac{\sqrt{1 - \beta^2}}{\sqrt{1 + \beta^2}}$$

4.5. Groupe de Lorentz et groupe de Poincaré.

Le groupe de Lorentz est défini par

$$\mathcal{L} = \left\{ L \in M_4(\mathbb{R}^4) \mid g = L^\top g L \right\}$$

C'est l'ensemble des matrices 4×4 L satisfaisant à l'égalité $g = L^\top g L$. C'est un groupe. En effet, l'ensemble \mathcal{L} contient clairement la matrice identité. Si L_1 et $L_2 \in \mathcal{L}$, alors

$$(L_1 L_2)^\top g (L_1 L_2) = L_2^\top \underbrace{(L_1^\top g L_1)}_{=g} L_2 = L_2^\top g L_2 = g$$

Toute matrice $L \in \mathcal{L}$ admet un inverse car l'égalité implique $\det(L)^2 = 1$ et donc $\det(L) = \pm 1 \neq 0$. De plus

$$g = L^\top g L \Rightarrow (L^\top)^{-1} g = g L \Rightarrow (L^{-1})^\top g L^{-1} = g$$

Finalement, nous savons que le produit matriciel est associatif.

Remarquons que

$$\begin{aligned} g = L^\top g L \Rightarrow 1 &= (L^\top g L)_{11} = \sum_{k=1}^4 \sum_{j=1}^4 (L^\top)_{1k} g_{kj} L_{j1} \\ &= \sum_{k=1}^4 L_{k1} g_{kk} L_{k1} = L_{11}^2 - L_{22}^2 - L_{33}^2 - L_{44}^2 \Rightarrow L_{11}^2 = 1 + L_{22}^2 + L_{33}^2 + L_{44}^2 \end{aligned}$$

Par conséquent,

$$L \in \mathcal{L} \Rightarrow L_{11} \geq 1 \text{ ou } L_{11} \leq -1$$

Les transformations telles que $L_{11} \geq 1$ sont dites orthochrones, les autres antichrones. Le produit de deux transformations orthochrones est orthochrone.

On note \mathcal{L}_+^\uparrow le sous groupe

$$\mathcal{L}_+^\uparrow = \left\{ L \in \mathcal{L} \mid L_{11} \geq 1 \text{ et } \det(L) = +1 \right\}$$

Il est appelé le sous-groupe de Lorentz restreint. Ses éléments sont dits orthochrones et propres. Définissons également les sous-ensembles

$$\mathcal{L}_-^\uparrow = \left\{ L \in \mathcal{L} \mid L_{11} \geq 1 \text{ et } \det(L) = -1 \right\}$$

$$\mathcal{L}_+^\downarrow = \left\{ L \in \mathcal{L} \mid L_{11} \leq -1 \text{ et } \det(L) = +1 \right\}$$

$$\mathcal{L}_-^\downarrow = \left\{ L \in \mathcal{L} \mid L_{11} \leq -1 \text{ et } \det(L) = -1 \right\}$$

Ce ne sont pas des sous-groupes. En revanche, les ensembles suivant sont des sous-groupes

- (1) $\mathcal{L}_+^\uparrow \cup \mathcal{L}_-^\uparrow$ (sous-groupe orthochrone)

(2) $\mathcal{L}_+^\uparrow \cup \mathcal{L}_+^\downarrow$ (sous-groupe propre)

Le groupe de Poincaré est le groupe des applications de \mathbb{R}^4 dans \mathbb{R}^4 contenant les translations et les transformations de Lorentz.

On peut montrer que toute transformation de Lorentz propre et orthochrone peut s'écrire de manière unique comme le produit d'une rotation et d'une transformation de Lorentz pure.

5. Contraction des longueurs, addition des vitesses, temps propre, effet Doppler

5.1. Contraction des longueurs.

Soit une règle de longueur l_0 au repos dans le référentiel R et superposée à l'axe x . Nous notons ses extrémités x_1 et x_2 et $l_0 = x_2 - x_1$. Dans R' , les extrémités de la règle ont les coordonnées (qui varient avec le temps)

$$x_1 = \gamma(x'_1 + \beta ct'_1) \text{ et } x_2 = \gamma(x'_2 + \beta ct'_2)$$

L'observateur fixe dans le référentiel R' effectue une mesure de la longueur de la règle au temps $t'_0 = t'_1 = t'_2$. Il trouve

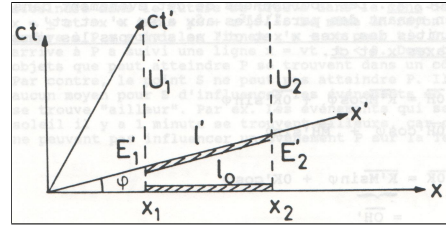
$$l' = x'_2 - x'_1 = \frac{x_2}{\gamma} - \beta ct'_0 - \left(\frac{x_1}{\gamma} - \beta ct'_0 \right) = \frac{x_2 - x_1}{\gamma} = l_0 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$$

c'est-à-dire

$$l' = l_0 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} < l_0$$

Supposons que la longueur de la règle soit mesurée en $t' = 0$. Les événements correspondant sont E'_1 et E'_2 situés sur l'axe x' . On trouve

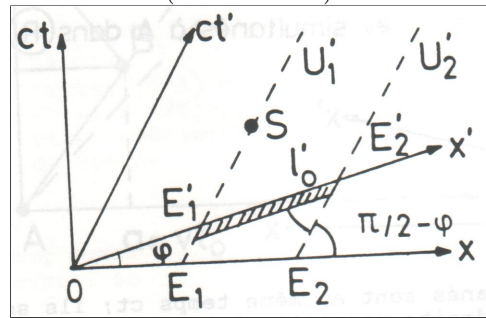
$$l' = \overline{E'_1 E'_2} \alpha = \frac{l_0}{\cos(\varphi)} \alpha = l_0 \frac{1}{\frac{1}{\sqrt{1+\beta^2}}} \frac{\sqrt{1-\beta^2}}{\sqrt{1+\beta^2}} = l_0 \sqrt{1-\beta^2}$$



(Dessin: UniGE)

Vérifions le principe de relativité. Considérons une règle fixée dans R' et située sur l'axe x' de longueur l'_0 . Les lignes d'univers sont deux droites U'_1 et U'_2 parallèles à l'axe ct' . Supposons que l'on mesure la règle dans R au temps $t = 0$. On note le résultat de la mesure par l . En vertu du théorème de Thalès,

$$\frac{\overline{OE_2}}{\overline{OE_1}} = \frac{\overline{OE'_2}}{\overline{OE'_1}}$$



(Dessin: UniGE)

Par conséquent,

$$\frac{\overline{OE_2}}{\overline{OE_1}} - 1 = \frac{\overline{OE'_2}}{\overline{OE'_1}} - 1 \Rightarrow \frac{\overline{OE_2} - \overline{OE_1}}{\overline{OE_1}} = \frac{\overline{OE'_2} - \overline{OE'_1}}{\overline{OE'_1}} \Rightarrow \overline{E_1 E_2} = \overline{E'_1 E'_2} \frac{\overline{OE_1}}{\overline{OE'_1}}$$

Par le théorème du sinus, il vient

$$\frac{\overline{OE_1}}{\sin(\pi/2 - 2\varphi)} = \frac{\overline{OE'_1}}{\sin(\pi/2 + \varphi)} \Rightarrow \frac{\overline{OE_1}}{\overline{OE'_1}} = \frac{\cos(2\varphi)}{\cos(\varphi)} = \frac{\cos^2(\varphi) - \sin^2(\varphi)}{\cos(\varphi)} = \cos(\varphi) (1 - \tan^2(\varphi))$$

Finalement, nous trouvons

$$l = \overline{E_1 E_2} = l'_0 \frac{1}{\alpha} \frac{\cos(2\varphi)}{\cos(\varphi)} = \frac{l'_0}{\alpha} \cos(\varphi) (1 - \tan^2(\varphi)) = \frac{l'_0}{\frac{\sqrt{1-\beta^2}}{\sqrt{1+\beta^2}}} \frac{1}{\sqrt{1+\beta^2}} (1 - \beta^2) = l'_0 \sqrt{1 - \beta^2}$$

5.2. Addition des vitesses.

On considère une particule qui se déplace à vitesse

$$\vec{u}' = \begin{pmatrix} u'_x \\ u'_y \\ u'_z \end{pmatrix}$$

dans le référentiel R' . L'observateur fixe dans R mesure la vitesse de cette particule et trouve

$$\vec{u} = \begin{pmatrix} u_x \\ u_y \\ u_z \end{pmatrix}$$

Comment exprimer \vec{u} à partir de \vec{u}' ?

Rappelons que

$$\begin{pmatrix} ct' \\ x' \end{pmatrix} = \gamma \begin{pmatrix} 1 & -\beta \\ -\beta & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ct \\ x \end{pmatrix}$$

Par conséquent,

$$u'_x = \frac{dx'}{dt'} = \frac{dx'}{dt} \cdot \frac{dt}{dt'} = \frac{\frac{dx'}{dt}}{\frac{dt'}{dt}} = \frac{\gamma(-\beta c + u_x)}{\gamma(1 - \frac{\beta}{c}u_x)}$$

d'où nous pouvons isoler u_x :

$$u'_x = \frac{-\beta c + u_x}{1 - \frac{\beta}{c}u_x} \Rightarrow u'_x \left(1 - \frac{\beta}{c}u_x\right) = -\beta c + u_x \Rightarrow u_x = \frac{u'_x + \beta c}{1 + \frac{\beta}{c}u'_x}$$

c'est-à-dire

$$\boxed{u_x = \frac{u'_x + v}{1 + \frac{u'_x v}{c^2}}}$$

Par ailleurs,

$$u'_y = \frac{dy'}{dt'} = \frac{dy'}{dt} \cdot \frac{dt}{dt'} = \frac{\frac{dy'}{dt}}{\frac{dt'}{dt}} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\gamma(1 - \frac{\beta}{c}u_x)} = \frac{u_y}{\gamma(1 - \frac{\beta}{c}u_x)}$$

et

$$u'_z = \frac{u_z}{\gamma(1 - \frac{\beta}{c}u_x)}$$

c'est-à-dire

$$u_y = u'_y \gamma \left(1 - \frac{\beta}{c} u_x \right) = \boxed{u'_y \frac{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}{1 + \frac{u'_x v}{c^2}} = u_y}$$

car

$$1 - \frac{\beta}{c} u_x = 1 - \frac{\frac{\beta}{c} u'_x + \beta^2}{1 + \frac{\beta}{c} u'_x} = \frac{1 - \beta^2}{1 + \frac{\beta}{c} u'_x}$$

De façon similaire,

$$\boxed{u_z = u'_z \frac{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}{1 + \frac{u'_x v}{c^2}}}$$

5.3. Temps propre.

Soit une horloge fixe dans le référentiel R' placée à son origine qui enregistre deux événements successifs

$$E'_1 = (ct'_1, 0) \text{ et } E'_2 = (ct'_2, 0) \text{ avec } t'_2 - t'_1 = T'$$

Dans le référentiel R on a

$$ct_1 = \gamma (ct'_1 + \beta \cdot 0) \text{ et } ct_2 = \gamma (ct'_2 + \beta \cdot 0) \text{ et } T = t_2 - t_1 = \gamma T'$$

c'est-à-dire

$$T = \frac{T'}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

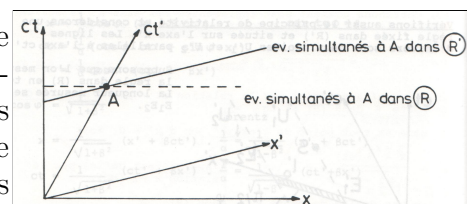
Imaginons une horloge qui se déplace dans le référentiel R avec une vitesse $\vec{v}(t)$ qui peut être variable. Nous supposons que c'est une horloge idéale dans le sens où la fréquence de son oscillateur relativement à une horloge immobile dans R ne dépend pas des accélérations qu'elle subit mais seulement de sa vitesse instantanée selon la formule donnée ci-dessus. Nous supposons que quand l'horloge fixe indique le temps t_0 les deux horloges sont synchronisées. Alors, quand l'horloge fixe indique le temps t_1 , l'horloge en mouvement indique le temps $t_0 + \tau$ où

$$\tau = \int_{t_0}^{t_1} \sqrt{1 - \frac{\|\vec{v}(t)\|^2}{c^2}} dt$$

Le temps τ mesuré par l'horloge en mouvement est appelé le temps propre (de l'horloge en mouvement).

5.4. Simultanéité.

Il faut remarquer que les événements simultanés dans le référentiel R ne sont pas les mêmes que les événements simultanés dans R' . Considérons un événement A . Les événements simultanés à A dans R se trouvent sur la droite parallèle à l'axe x passant par A , tandis que les événements simultanés à A dans R' se trouvent sur la droite passant par A et parallèle à l'axe x' .

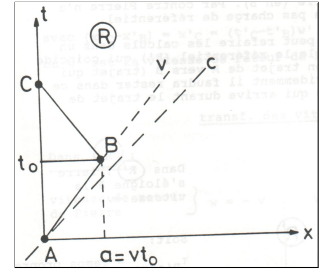


(Dessin: UniGE)

5.5. Paradoxe des jumeaux.

Imaginons deux jumeaux, Pierre et Paul. A 20 ans, Paul part faire un voyage dans l'univers à la vitesse constante $v = 0.9c$, tandis que Pierre reste sur la Terre. Lorsque que Pierre a 60 ans, Paul revient sur Terre. Quel est l'âge de Paul ?

Dans le référentiel R de Pierre, le voyage de Paul a la trajectoire dessinée sur la figure ci-contre. Pierre reste au même points ($x = 0$), sa trajectoire est l'axe t de A à C . Paul s'éloigne de A jusqu'en B ($x = a, t_0$) puis revient sur Terre en C ($x = 0, 2t_0$). Pour Pierre, l'âge de Paul se calcule à partir de la dilatation des durées d'un référentiel en mouvement à vitesse v . Pour Pierre, le voyage de Paul a duré 40 ans et l'âge de Paul à son retour sur Terre est



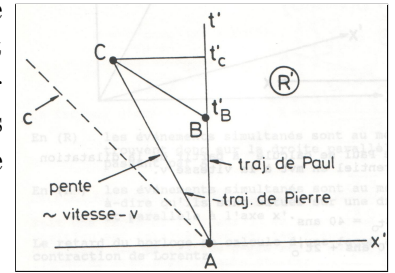
(Dessin: UniGE)

$$20 + 40\sqrt{1 - 0.9^2} \approx 37 \text{ ans et 5 mois}$$

Le paradoxe apparaît lorsque Paul dit: "En fait c'est moi qui suis resté sur place et c'est Pierre et la Terre qui se sont éloignés puis rapprochés". Pour Paul, c'est Pierre qui a été dans le référentiel en mouvement et qui donc devrait être plus jeune au moment des retrouvailles.

L'erreur que commet Paul dans son raisonnement est qu'il change de référentiel au milieu du voyage. Il peut mesurer les accélérations au moment où il change de cap pour revenir sur la Terre. Par contre, Pierre ne mesure aucune accélération, il reste tout le long du voyage dans le même référentiel.

Pour illustrer ce point, nous pouvons refaire les calculs, par exemple dans le référentiel R' qui coïncide avec celui de Paul durant son trajet de A vers B . Évidemment, il faudra rester dans ce référentiel pour examiner ce qui arrive durant le trajet de retour de B vers C . Dans R' , Pierre s'éloigne à la vitesse $-v$. Notons τ_{Pierre} le temps propre de Pierre et τ_{Paul} le temps propre de Paul. On trouve que



(Dessin: UniGE)

$$\tau_{Pierre} = t'_C \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} = t'_C \sqrt{1 - \beta^2}$$

et

$$\tau_{Paul} = t'_B + (t'_C - t'_B) \sqrt{1 - \frac{w'^2}{c^2}}$$

où w' est la vitesse de retour de Paul observée depuis le référentiel R' .

Dans R , la vitesse de retour de Paul vaut $w = -v$. Par conséquent, dans R' on trouve

$$w' = \frac{w - v}{1 - \frac{vw}{c^2}} = \frac{-2v}{1 + \frac{v^2}{c^2}} = \frac{-2v}{1 + \beta^2}$$

Par ailleurs ($v > 0$),

$$x'_C = -vt'_C = -|w'|(t'_C - t'_B) \Rightarrow t'_C(|w'| - v) = t'_B|w'| \Rightarrow t'_B = t'_C \left(1 - \frac{v}{\frac{2v}{1+\beta^2}}\right) = t'_C \frac{1 - \beta^2}{2}$$

et donc

$$t'_C - t'_B = t'_C \frac{1 + \beta^2}{2}$$

Par ailleurs,

$$\sqrt{1 - \frac{w'^2}{c^2}} = \sqrt{1 - \frac{4v^2}{(1+\beta^2)^2 c^2}} = \frac{1}{1+\beta^2} \sqrt{(1+\beta^2)^2 - 4\beta^2} = \frac{1}{1+\beta^2} \sqrt{1+2\beta^2+\beta^4-4\beta^2} = \frac{1-\beta^2}{1+\beta^2}$$

Finalement, il vient

$$\tau_{Paul} = \left(\frac{1-\beta^2}{2} + \frac{1+\beta^2}{2} \frac{1-\beta^2}{1+\beta^2} \right) t'_C = t'_C (1-\beta^2) = \underbrace{t'_C \sqrt{1-\beta^2}}_{=\tau_{Pierre}} \sqrt{1-\beta^2}$$

c'est-à-dire

$$\tau_{Paul} = \tau_{Pierre} \sqrt{1-\beta^2}$$

5.6. Effet Doppler.

La fréquence ν_+ d'un son quand sa source se rapproche est plus haute que la fréquence ν_0 du son quand la source est immobile. Par ailleurs, la fréquence ν_- du même son est plus basse que ν_0 quand la source s'éloigne. C'est l'effet Doppler classique pour les ondes sonores.

Il s'explique comme suit. Nous considérons un problème unidimensionnel dans lequel la source émet des signaux à intervalles de temps réguliers de durée $T_0 = \frac{1}{\nu_0}$ en direction du récepteur

$$S \longrightarrow R \\ \longrightarrow +$$

La source est à gauche du récepteur et l'axe des coordonnées est orienté positivement vers la droite. Désignons par R le référentiel du milieu dans lequel se propage l'onde. Notons c_0 la vitesse des ondes dans R , v_s la vitesse de la source avec $v_s > 0$ quand la source s'approche du récepteur et $v_s < 0$ quand la source s'éloigne du récepteur. Notons v_r la vitesse du récepteur avec $v_r > 0$ quand le récepteur s'éloigne de la source et $v_r < 0$ quand le récepteur s'approche de la source. Notons également $\nu_r = \frac{1}{T_r}$ la fréquence du signal reçu par le récepteur. Considérons deux signaux consécutifs. Plaçons-nous dans le référentiel R . Quand le deuxième signal est émis, le premier a parcouru une distance

$$c_0 T_0$$

et la distance séparant les deux signaux vaut

$$d = c_0 T_0 - v_s T_0$$

Le récepteur reçoit le premier signal. Au bout d'un temps T_r il reçoit le deuxième signal. Alors,

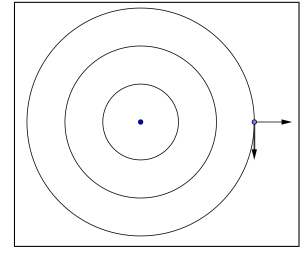
$$c_0 T_r = d + v_r T_r \Rightarrow T_r = \frac{c_0 T_0 - v_s T_0}{c_0 - v_r} \Rightarrow \nu_r = \nu_0 \frac{c_0 - v_r}{c_0 - v_s}$$

En particulier, si $v_s = 0$, on trouve

$$v_s = 0 \Rightarrow \nu_r = \nu_0 \left(1 - \frac{v_r}{c_0} \right)$$

Considérons maintenant des ondes électromagnétiques et plaçons-nous dans le référentiel R de la source. Nous considérons deux cas:

- (1) Le récepteur se déplace à vitesse v perpendiculairement à la direction de l'onde (effet Doppler transverse).
- (2) Le récepteur se déplace à vitesse v parallèlement à la direction de l'onde (effet Doppler longitudinal) avec $v > 0$ si le récepteur s'approche de la source et $v < 0$ s'il s'en éloigne.



Commençons par l'effet Doppler transverse. C'est un effet purement relativiste. En raison du phénomène de dilatation des durées, nous trouvons que

$$\nu_r = \frac{1}{T_r} = \frac{1}{T_0\gamma} = \nu_0\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$$

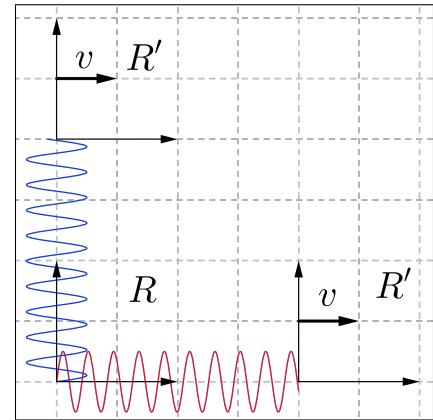
L'effet Doppler transverse a été vérifié expérimentalement grâce à des instruments de mesure utilisant l'effet Mössbauer.

L'effet Doppler transverse et l'effet Doppler longitudinal correspondent aux situations illustrées ci-contre. Dans le référentiel R , deux ondes sont émises depuis l'origine. L'onde "horizontale" est décrite par la fonction

$$f(x, t) = \sin(kx - \omega t) \text{ où } k = \frac{2\pi}{\lambda} \text{ et } \omega = 2\pi\nu \text{ et } c = \lambda\nu$$

Typiquement, f décrit (à une constante près) la valeur du champ électrique dans une direction perpendiculaire à la direction de propagation de l'onde. L'onde "verticale" est décrite par la fonction

$$g(y, t) = \sin(ky - \omega t)$$



D'après le principe de relativité, dans le référentiel R' à "droite", la même onde est décrite par la fonction

$$f'(x', t') = \sin(k'x' - \omega't') \text{ où } k' = \frac{2\pi}{\lambda'} \text{ et } \omega' = 2\pi\nu' \text{ et } c = \lambda'\nu'$$

Or, d'après les transformations de Lorentz,

$$k'x' - \omega't' = k'\gamma(-\beta ct + x) - \omega'\gamma\left(t - \frac{\beta}{c}x\right) = \gamma\left(k' + \omega'\frac{\beta}{c}\right)x - \gamma(k'\beta c + \omega')t$$

Nous verrons que

$$f'(x', t') = \mathcal{C}f(x, t) \forall x, t$$

où la constante \mathcal{C} ne dépend pas de x et t . Par conséquent,

$$k'x' - \omega't' = kx - \omega t \forall x, t$$

c'est-à-dire

$$\begin{cases} k = \gamma \left(k' + \omega' \frac{\beta}{c} \right) \\ \omega = \gamma (k' \beta c + \omega') \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \beta c k = \gamma (\beta c k' + \omega' \beta^2) \\ \omega = \gamma (k' \beta c + \omega') \end{cases} \Rightarrow \gamma \omega' (1 - \beta^2) = \omega - \beta c k$$

$$\Rightarrow \sqrt{1 - \beta^2} 2\pi \nu' = 2\pi \nu - \beta c \frac{2\pi}{\lambda} \xrightarrow{\frac{c}{\lambda} = \nu} \nu' = \frac{1 - \beta}{\sqrt{1 - \beta^2}} \nu = \frac{1 - \beta}{\sqrt{(1 - \beta)(1 + \beta)}} \nu = \nu \sqrt{\frac{1 - \beta}{1 + \beta}}$$

En résumé, nous trouvons que l'effet Doppler longitudinal provoque une modification de la fréquence du signal reçu donnée par

$$\nu_r = \nu_0 \sqrt{\frac{1 - \beta}{1 + \beta}}$$

où $\beta = \frac{v}{c} > 0$ si le récepteur s'éloigne de la source et $\beta < 0$ si le récepteur s'approche de la source.

Dans R , on observe une onde s'éloigner à vitesse c sous un angle θ . Un front d'onde passe à l'origine au temps $t = 0$. C'est l'événement

$$E_1 = \begin{pmatrix} ct \\ x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Après un temps $T = \frac{1}{\nu}$, le même front d'onde est en

$$E_2 = \begin{pmatrix} cT \\ \cos(\theta)cT \\ \sin(\theta)cT \end{pmatrix}$$

Dans le référentiel R' ces événements correspondent aux événements

$$E'_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ et } E'_2 = \begin{pmatrix} cT' \\ x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma(cT - \beta \cos(\theta)cT) \\ \gamma(-\beta cT + \cos(\theta)cT) \\ \sin(\theta)cT \end{pmatrix}$$

Par conséquent,

$$T' = \gamma T (1 - \beta \cos(\theta))$$

et

$$\nu' = \frac{\nu}{\gamma(1 - \beta \cos(\theta))}$$

Si $\theta = \pi$, il vient

$$\nu' = \frac{\nu}{\gamma(1 + \beta)} = \nu \frac{\sqrt{1 - \beta^2}}{1 + \beta} = \nu \sqrt{\frac{1 - \beta}{1 + \beta}}$$

C'est l'effet Doppler longitudinal. Si $\theta = \frac{\pi}{2}$, alors

$$\nu' = \frac{\nu}{\gamma}$$

C'est l'effet Doppler transverse.

CHAPITRE 3

Relativité générale

1. Introduction

En 1907, Einstein publie un article contenant pour la première fois l'utilisation du principe d'équivalence et prédit l'effet de décalage gravitationnel vers le rouge et le principe de la déviation de la lumière par les corps massifs. Il qualifiera le contenu de cet article d'“idée la plus heureuse de ma vie”. En 1911, il revient à la relativité générale et calcule pour la première fois la déviation des rayons lumineux par le soleil. La valeur trouvée est la moitié du chiffre correct. Il achève la théorie complète de la relativité générale en 1915. Il résout notamment un problème vieux de 60 ans en prédisant correctement grâce à sa nouvelle théorie relativiste de la gravitation l'avance du périhélie de la planète Mercure.

2. Le principe d'équivalence faible

Considérons un objet de masse m_p soumis à la force d'attraction de la Terre (la force de gravitation). Selon Newton, la force subie par l'objet est donnée par

$$F_{grav} = G \frac{m_p M_T}{R_T^2}$$

où M_T est la masse de la Terre, R_T son rayon et G est la constante universelle de gravitation ($G \approx 6.67 \cdot 10^{-11} \frac{\text{Nm}^2}{\text{kg}^2}$).

La masse m_p intervenant dans la formule de la force de gravitation est appelée **masse gravitationnelle**. Elle se mesure avec une balance à plateaux par comparaison avec la masse du prototype international du kilogramme conservé au Bureau International des Poids et Mesures (BIPM: <http://www.bipm.org>).

La masse m_i intervenant dans la deuxième loi de Newton

$$F_{res} = m_i \cdot a$$

est appelée **masse inertielle**. Elle traduit la résistance d'un corps à sa mise en mouvement par une force.

Pour un corps en chute libre (*i.e.* subissant uniquement la force de gravitation), il suit que

$$m_i a = G \frac{M_T m_p}{R_T^2} \Rightarrow a = G \frac{M_T}{R_T^2} \frac{m_p}{m_i}$$

Or, comme l'a constaté Galilée pour la première fois en lâchant du haut de la tour de Pise des boules de différentes masses (selon le mythe), tous les corps en chute libre (sans frottement dans l'air) subissent la même accélération (environ $9.8 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$). Cela implique que le rapport $\frac{m_p}{m_i}$ est le même pour tous les corps. On peut supposer que

$$\frac{m_p}{m_i} = 1$$

pour tous les corps (un autre choix reviendrait à un changement de la valeur de la constante universelle de gravitation G). L'identité entre la masse inertielle et la masse gravitationnelle est appelée le **principe d'équivalence faible**. Il a été confirmé par de nombreuses expériences.

Citons, par exemple, l'expérience d'Eötvös *et al.*, 1889-1917. On utilise une balance de torsion (figure 1) à Budapest. On suppose que $l_1 = l_2 = l$ et on choisit deux corps avec la même masse gravitationnelle $m_{p1} = m_{p2}$ (ce que l'on vérifie avec une balance à plateaux) mais de compositions différentes (par exemple, un en métal et l'autre en bois). Chacun des deux corps subit une force gravitationnelle (attraction de la Terre) et une force inertielle (la force centrifuge due à la rotation de la Terre).

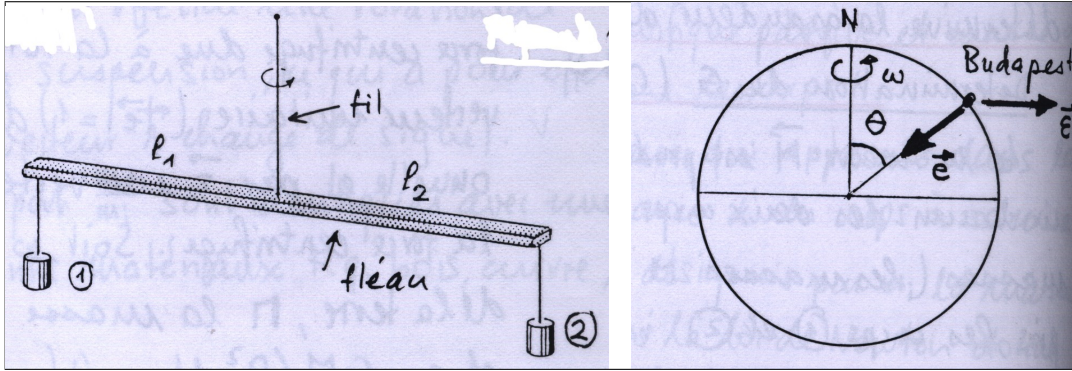


FIGURE 1. Expérience d'Eötvös. (Dessin: UniGe)

Désignons par \vec{e} un vecteur unitaire (*i.e.* $\|\vec{e}\| = 1$) dans la direction de la force gravitationnelle (dirigé vers le centre de la Terre) et un autre vecteur unitaire, $\vec{\varepsilon}$, dans la direction de la force centrifuge. Notons

$$g = G \frac{M_T}{R_T^2}$$

Alors,

$$\begin{aligned} \vec{F}_{res/1} &= \underbrace{m_{p1}g\vec{e}}_{=:\vec{F}_1} + \underbrace{m_{i1}R\omega^2 \sin(\theta)\vec{\varepsilon}}_{=:\vec{f}_1} \\ \vec{F}_{res/2} &= \underbrace{m_{p2}g\vec{e}}_{=:\vec{F}_2} + \underbrace{m_{i2}R\omega^2 \sin(\theta)\vec{\varepsilon}}_{=:\vec{f}_2} \end{aligned}$$

où ω désigne la vitesse angulaire de la Terre ($\approx \frac{2\pi}{24 \cdot 3600} \frac{\text{rad}}{\text{s}}$).

Désignons encore par $\vec{\lambda}$ un vecteur unitaire parallèle au fléau de la balance de torsion. Alors, le moment de force total \vec{M} est donné par

$$\vec{M} = l\vec{\lambda} \times \vec{F}_{res/1} - l\vec{\lambda} \times \vec{F}_{res/2} = l\vec{\lambda} \times (\vec{F}_{res/1} - \vec{F}_{res/2})$$

Notons

$$\vec{F} = \vec{F}_{res/1} + \vec{F}_{res/2}$$

Alors, la direction du fil est donnée par $\frac{\vec{F}}{F}$ où $F = \|\vec{F}\|$ (remarquons que la tension dans le fil compense les autres forces, le pendule est suspendu au fil). La composante de \vec{M} parallèle au fil

est donnée par

$$\begin{aligned} M_{fil} &= \vec{M} \cdot \frac{\vec{F}}{F} = \frac{l}{F} \left[\vec{\lambda} \times \left(\vec{F}_{res/1} - \vec{F}_{res/2} \right) \right] \cdot \left(\vec{F}_{res/1} + \vec{F}_{res/2} \right) \\ &= \frac{l}{F} \vec{\lambda} \cdot \left[\left(\vec{F}_{res/1} - \vec{F}_{res/2} \right) \times \left(\vec{F}_{res/1} + \vec{F}_{res/2} \right) \right] \end{aligned}$$

en raison de l'invariance du produit mixte sous permutation cyclique des termes.

En remarquant que

$$\vec{F}_j \times \vec{F}_k = \vec{0} \text{ et } \vec{f}_j \times \vec{f}_k = \vec{0} \quad (j, k = 1, 2)$$

il suit que

$$\begin{aligned} M_{fil} &= 2 \frac{l}{F} \vec{\lambda} \cdot \left(\vec{F}_1 \times \vec{f}_2 - \vec{F}_2 \times \vec{f}_1 \right) = 2 \frac{l}{F} g R \omega^2 \sin(\theta) \left[\vec{\lambda} \cdot (\vec{e} \times \vec{\varepsilon}) \right] (m_{p1} m_{i2} - m_{p2} m_{i1}) \\ &= 2 \frac{l}{F} m_{i1} m_{i2} g R \omega^2 \sin(\theta) \left[\vec{\lambda} \cdot (\vec{e} \times \vec{\varepsilon}) \right] \left(\frac{m_{p1}}{m_{i1}} - \frac{m_{p2}}{m_{i2}} \right) \end{aligned}$$

Le fil subit une torsion si et seulement si

$$\frac{m_{p1}}{m_{i1}} \neq \frac{m_{p2}}{m_{i2}}$$

L'expérience montre que les rapports $\frac{m_p}{m_i}$ sont identiques avec une précision de 10^{-8} ⁽¹⁾ pour différents matériaux: bois, cuivre, eau, suif, amiante.

Remarquons que si l'on tourne le pendule de 180° , alors le vecteur $\vec{\lambda}$ change de signe et M_{fil} change également de signe. Pour observer une éventuelle torsion du fil, on compare la position du fléau avant et après avoir tourné le pendule de 180° .

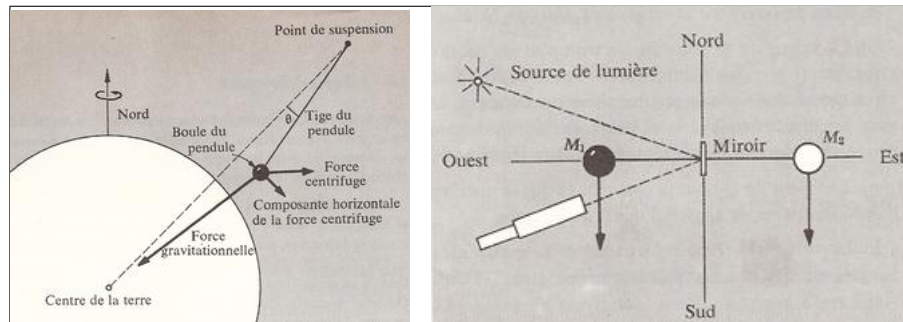


FIGURE 2. Expérience Eötvös.

¹Plus précisément,

$$\left| \frac{\frac{m_{p1}}{m_{i1}} - \frac{m_{p2}}{m_{i2}}}{\frac{1}{2} \left[\frac{m_{p1}}{m_{i1}} + \frac{m_{p2}}{m_{i2}} \right]} \right| \leq 5 \cdot 10^{-9}$$

3. Le principe d'équivalence

En 1907, Einstein énonce le **principe d'équivalence** qui étend le principe d'équivalence faible à tous les phénomènes physiques. Il stipule en particulier que les lois de la physique sont les mêmes dans

- (1) un ("petit") référentiel se trouvant dans un champ de gravitation et dans
- (2) un référentiel uniformément accéléré sans gravité.

Le principe d'équivalence faible implique que dans un champ gravitationnel tous les corps subissent la même accélération. Il en résulte, par exemple, que les lois de la mécanique seront les mêmes dans une fusée dans les deux cas suivants:

- (1) la fusée est loin de toute masse (elle ne subit par conséquent aucune force de gravitation) mais ses moteurs sont allumés et elle accélère de façon constante avec une accélération g ,
- (2) elle est au repos sur le sol d'une planète à la surface de laquelle le champ de gravitation vaut g .

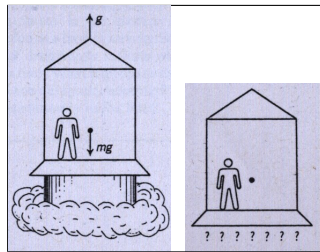


FIGURE 3. Principe d'équivalence.

4. Décalage vers le rouge

Nous allons maintenant expliquer comment, à partir du principe d'équivalence, il est possible de calculer le décalage gravitationnel des fréquences qui est le phénomène suivant. Imaginons deux observateurs dans une tour à des hauteurs différentes. Si l'observateur le plus bas émet une onde électromagnétique de fréquence ν_1 en direction de l'observateur situé plus haut, celui-ci observera une onde électromagnétique de fréquence $\nu_2 < \nu_1$. En particulier, l'horloge de l'observateur du bas retarde par rapport à l'horloge de l'observateur du haut. Ce phénomène est connu sous le nom de décalage vers le rouge gravitationnel ou décalage d'Einstein. Il fut prédit par Einstein dans son article de 1907. L'argument que nous utilisons n'est pas celui invoqué originellement par Einstein.

Imaginons un disque de rayon R en rotation. Notons Ω la vitesse angulaire du disque. Imaginons une horloge H_0 immobile placée au centre du disque et une autre horloge, H_1 , placée au bord du disque et tournant avec celui-ci. Nous notons t_0 le temps indiqué par l'horloge immobile H_0 et t_1 le temps indiqué par l'horloge H_1 . Nous supposons qu'elles ont été synchronisées au temps 0: $t_0 = 0 \Leftrightarrow t_1 = 0$.

Comme nous l'avons vu, en vertu de la théorie de la relativité restreinte, il vient

$$t_1 = \int_0^{t_0} \sqrt{1 - \frac{v(\tau)^2}{c^2}} d\tau = t_0 \sqrt{1 - \frac{(R\Omega)^2}{c^2}}$$

L'accélération centripète (vers l'intérieur du disque) de l'horloge H_1 est donnée par

$$a = \Omega^2 R$$

Par conséquent, l'horloge H_1 subit une force centripète (dirigée vers l'extérieur du disque) égale à $m\Omega^2 R$ où m est la masse de l'horloge. Tout se passe comme si elle était dans un champ de gravitation $g = \Omega^2 R$ alors que l'horloge au centre H_0 ne subit aucune force due à la rotation et tout se passe comme si elle était à l'infini, c'est-à-dire éloignée de tout corps.

En résumé, l'horloge subissant une force de pesanteur fictive retarde par rapport à l'horloge ne subissant aucune force de pesanteur. En vertu du principe d'équivalence, nous devons conclure qu'une horloge placée dans un champ de gravitation va retarder par rapport à une horloge placée dans un espace sans gravité. Voyons maintenant comment nous pouvons passer d'une prédiction qualitative à une prédiction quantitative.

Remarquons pour commencer que l'accélération subie par l'horloge H_1 est la même que le champ de gravitation à distance r du centre d'une planète de masse M où

$$G\frac{M}{r^2} = g = \Omega^2 R$$

En substituant dans la formule pour t_1 , il reste le rayon du disque R et nous ne pouvons pas, ce faisant, trouver une formule pour t_1 dépendant uniquement du champ de gravitation.

La force centrifuge est conservative, elle dérive d'un potentiel. En effet, notons \vec{R} la position de l'horloge H_1 relativement à un système d'axes fixes dont l'origine coïncide avec le centre du cercle et $R = \|\vec{R}\|$. Alors

$$\vec{F} = m\Omega^2 \vec{R} = -m(\text{grad} U)(R) \text{ où } U(R) = -\frac{1}{2}\Omega^2 R^2 = \frac{1}{2}\Omega(x^2 + y^2)$$

Par conséquent, l'intégrale le long d'une courbe allant d'un point A à un point B ne dépend pas du chemin reliant A à B :

$$\int_{A \rightarrow B} \vec{F} \bullet d\vec{l} = -m(U(r_B) - U(r_A)) = mU(r_A) - mU(r_B)$$

où, par exemple, r_A désigne la distance à l'origine de A . En particulier, pour amener l'horloge H_1 au centre du disque, il faut effectuer un travail égal à

$$\mathcal{A} = - \int_{R \rightarrow 0} \vec{F} \bullet d\vec{l} = -(mU(R) - 0) = m\frac{1}{2}\Omega^2 R^2$$

Il suit que

$$t_1 = t_0 \sqrt{1 - \frac{2\mathcal{A}/m}{c^2}}$$

La force de gravitation est également conservative. Notons \vec{r} la position d'une masse m relativement à un système d'axes qui coïncide avec le centre d'une planète sphérique homogène de masse M . Alors,

$$\vec{F}_{M/m} = -\frac{GMm}{r^2} \frac{\vec{r}}{r} = -m(\text{grad} U)(r) \text{ où } U(r) = -\frac{GM}{r}$$

Le travail à fournir pour amener la masse m à l'infini (dans un espace sans gravité) vaut

$$\mathcal{A} = - \int_{r \rightarrow \infty} \vec{F}_{M/m} \bullet d\vec{l} = m(U(\infty) - U(r)) = -mU(r) = m\frac{GM}{r}$$

En vertu du principe d'équivalence, les lois de la physique doivent être les mêmes dans un repère uniformément accéléré et sans gravité et dans un repère soumis à la gravitation. Par conséquent,

nous devons conclure que le temps t_1 indiqué par une horloge H_1 se trouvant à une distance r du centre d'une planète sphérique homogène de masse M est donné, relativement au temps indiqué par une horloge H_0 infiniment éloignée de la planète et dans un espace sans gravité, par

$$t_1 = t_0 \sqrt{1 - \frac{2GM}{rc^2}} = t_0 \sqrt{1 - \frac{R_S}{r}}$$

où R_S est le rayon de Schwartzschild de la planète.

Rappelons que pour qu'un corps lancé verticalement à la surface d'une planète sphérique homogène de rayon R de masse M ne retombe jamais, il faut au moins que sa vitesse soit donnée par (conservation de l'énergie mécanique)

$$\frac{1}{2}mv^2 = \frac{GMm}{R} \Rightarrow v^2 = \frac{2GM}{R}$$

Cette vitesse est appelée la vitesse de libération. Elle vaut environ 11.2 km/s pour la Terre. Le rayon de Schwartzschild est le rayon que devrait avoir la planète pour que sa vitesse de libération soit égale à la vitesse de la lumière et qu'ainsi cette planète soit un trou noir au sens de Laplace:

$$R_S = \frac{2GM}{c^2}$$

5. Exemples

Donnons quelques exemples.

EXEMPLE 5.1. Des jumeaux, Robert et Bernard vivent à Marseille. Robert part pour Chamonix et passe une semaine au sommet du Mont-Blanc (altitude $x \approx 4'800$ m). Quand il revient à Marseille, il est un peu plus vieux que son frère:

$$t_B = t_0 \sqrt{1 - \frac{R_S}{R_T}} \text{ et } t_R = t_0 \sqrt{1 - \frac{R_S}{R_T + x}}$$

$$\Rightarrow t_R(x) = t_B \frac{\sqrt{1 - \frac{R_S}{R_T + x}}}{\sqrt{1 - \frac{R_S}{R_T}}} = t_B \sqrt{\frac{1 - \frac{R_S}{R_T + x}}{1 - \frac{R_S}{R_T}}} =: t_B \cdot \rho(x)$$

Rappelons que pour la Terre,

$$M_T \approx 5.97 \cdot 10^{24} \text{ kg}, R_T = 6.37 \cdot 10^6 \text{ m} \Rightarrow R_S \approx 8.85 \text{ mm} \Rightarrow \alpha := \frac{R_S}{R_T} \approx 1.40 \cdot 10^{-9}$$

On peut trouver une bonne approximation de la fonction $\rho(x)$ comme suit: notons

$$\beta = \frac{1}{1 + \frac{x}{R_T}} = \frac{R_T}{R_T + x}$$

Alors

$$\begin{aligned}\rho(x) &= \sqrt{\frac{1-\alpha\beta}{1-\alpha}} = \sqrt{(1-\alpha\beta)(1+\alpha+\alpha^2+\dots)} = \sqrt{1+\alpha(1-\beta)+O(\alpha^2)} \\ &\approx \sqrt{1+\alpha(1-\beta)} \approx 1 + \frac{1}{2}\alpha(1-\beta) = 1 + \frac{R_S}{2R_T} \frac{x}{R_T+x}\end{aligned}$$

Pour $x < R_T$, il vient,

$$\beta = \frac{1}{1+\frac{x}{R_T}} = 1 - \frac{x}{R_T} + \left(\frac{x}{R_T}\right)^2 - \dots$$

et si $x \ll R_T$, on peut écrire

$$\rho(x) \approx 1 + \frac{R_S}{2R_T} \frac{x}{R_T} = 1 + \frac{R_S}{2R_T^2} x \approx 1 + 1.09 \cdot 10^{-16} x$$

Par conséquent,

$$t_R - t_B = 1.09 \cdot 10^{-16} x$$

et à son retour à Marseille, Robert est plus vieux que Bernard de (*i.e.* sa montre avance de)

$$1.09 \cdot 10^{-16} \cdot 4800 \cdot 7 \cdot 24 \cdot 3600 \approx 3.16 \cdot 10^{-7} \text{ s} = 316 \text{ ns}$$

EXEMPLE 5.2. Les satellites du réseau GPS ont une altitude de 20'000 km. Sans compter les effets dus aux vitesses relatives, l'horloge d'un satellite avance par rapport à une horloge au niveau de la mer de

$$\frac{R_S}{2R_T} \frac{x}{x+R_T} \approx 5.27 \cdot 10^{-10} \text{ ns par seconde}$$

soit environ 32 ns par minute ou environ 46 μs par jour.

Remarquons que pour des petites hauteurs x ,

$$\rho(x) - 1 \approx \frac{R_S}{2R_T^2} x = \frac{GM_T x}{c^2 R_T^2} = \frac{gx}{c^2}$$

qui est la formule utilisée par Hafele et Keating pour calculer l'effet gravitationnel sur le décalage des horloges.

Pour terminer, mentionnons une propriété remarquable de la théorie de la relativité. On peut démontrer qu'en n'importe quel point du géoïde terrestre (au niveau de la mer), les horloges battent toutes au même rythme et par conséquent, elles restent synchronisées. La Terre est un ellipsoïde. Pour une horloge située en point situé à une distance plus grande du centre de la Terre (mais toujours au niveau de la mer), la vitesse de rotation sera plus grande mais la gravitation sera également moins forte et les différences (en termes de décalage de fréquence) se compenseront exactement. Ce résultat surprenant n'est pas une coïncidence dans la mesure où la vitesse de rotation de la Terre détermine en partie sa forme d'ellipsoïde.

6. Vérifications expérimentales de l'effet Einstein

La première expérience à vérifier l'effet Einstein fut celle de Pound et Rebka en 1959 qui consista à mesurer le décalage en fréquence entre le haut et le bas d'une tour de la manière suivante. On émet depuis le sommet d'une tour de la lumière vers un récepteur situé au pied de la tour. L'émetteur émet de la lumière à une fréquence ν_1 bien précise et le récepteur est ajusté exactement sur la même fréquence, ce qui signifie qu'il réagit uniquement si la lumière incidente a la fréquence ν_1 . On constate que pour que le récepteur réagisse, il est nécessaire de l'éloigner de l'émetteur avec une vitesse adéquate. Conclusion: il faut compenser l'effet Einstein par un effet Doppler pour que le récepteur réagisse, ce qui prouve que la fréquence ν_0 du signal reçu est plus grande que ν_1 .

En 1976, l'effet Einstein fut vérifié avec une précision meilleure que 1 pour 10'000 par une horloge atomique embarquée à bord d'une fusée (expérience de Vessot et Levine).

CHAPITRE 4

Equations de Maxwell

En 1865, le physicien écossais James Clerk Maxwell (1831-1879) publie sous la forme d'un système d'équations (initialement 20 équations à 20 inconnues, réduit par la suite par Heaviside à un système de 4 équations que nous verrons plus loin) une synthèse des diverses lois expérimentales concernant l'électricité et le magnétisme établies par ses prédécesseurs.

Dans cette section nous présentons de manière succincte les équations de Maxwell qui décrivent les champs électriques et magnétiques. Nous allons également donner les solutions des ces équations dans le vide. Nous devons commencer par rappeler quelques notions d'électricité et de magnétisme.

1. Champs électrique et magnétique

Les atomes (~ 1 angström=0.1 nm) sont électriquement neutres. Ils sont composés de particules neutres (les neutrons dans le noyau) et de particules chargées: les protons (+) et les électrons (-). Un courant est un mouvement de charges (par exemple d'électrons). Un courant de 1 ampère (A) correspond à un débit de charges de 1 coulomb (C) par seconde. La charge de l'électron et du proton vaut (au signe près) $1.602 \cdot 10^{-19}$ C. Il faut donc $\frac{1}{1.602} \cdot 10^{19} \approx 6.24 \cdot 10^{18}$ électrons pour faire un coulomb et un débit de $6.24 \cdot 10^{18}$ électrons par seconde pour faire un courant de 1 ampère.

Une particule de charge q se déplaçant à vitesse \vec{v} dans un référentiel galiléen R subit une force (dite de Lorentz) donnée par

$$\vec{F} = q \left(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B} \right)$$

où \vec{E} est le champ électrique où se trouve la charge et \vec{B} le champ magnétique.

2. Champ électrique

Le **champ électrique** est une propriété du vide. Il est décrit dans le référentiel d'inertie R par une fonction

$$\begin{aligned} \vec{E} : \mathbb{R}^4 &\rightarrow \mathbb{R}^3 \\ (\vec{x}, t) &\mapsto \vec{E}(\vec{x}, t) \end{aligned}$$

On mesure la valeur du champ électrique en \vec{x} au temps t en plaçant une charge immobile q de masse m en \vec{x} au temps t et en mesurant son accélération \vec{a} (si le champ de gravitation est négligeable). Le champ électrique est donné par (il suffit de remplacer dans l'expression pour la force de Lorentz \vec{v} par $\vec{0}$ et \vec{F} par $m\vec{a}$):

$$\vec{E}(\vec{x}, t) = \frac{m}{q} \vec{a}$$

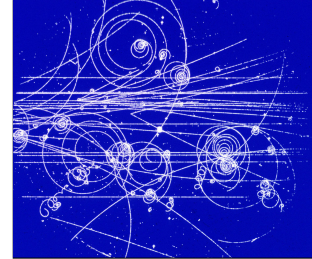
Les unités du champ électrique sont: $[E] = 1 \frac{\text{volt}}{\text{m}} = 1 \frac{\text{V}}{\text{m}} = 1 \frac{\text{N}}{\text{C}} = 1 \frac{\text{kg} \cdot \text{m}}{\text{A} \cdot \text{s}^2} = 1 \frac{\text{kg} \cdot \text{m}}{\text{A} \cdot \text{s}^3}$

3. Champ magnétique

De même, le **champ magnétique** est une propriété du vide. Il est décrit par une fonction

$$\begin{aligned}\vec{B} : \mathbb{R}^4 &\rightarrow \mathbb{R}^3 \\ (\vec{x}, t) &\mapsto \vec{B}(\vec{x}, t)\end{aligned}$$

On mesure la direction du champ magnétique en \vec{x} au temps t en plaçant en \vec{x} au temps t une boussole. L'intensité du champ magnétique peut se mesurer par exemple en plaçant une charge q de masse m avec une vitesse \vec{v} parallèle au champ électrique et en mesurant le rayon de courbure r de sa trajectoire (le rayon du cercle osculateur). Dans cette situation, la force centripète subie par la charge est donnée par (en notant $v = \|\vec{v}\|$, $B = \|\vec{B}\|$ et α l'angle entre \vec{v} et \vec{B})



$$\|m\vec{a} - q\vec{E}\| = |q|\|\vec{v} \times \vec{B}\| = m\frac{v^2}{r} = |q \sin(\alpha)|vB \Rightarrow B = \frac{m}{|q|} \frac{v}{r \sin(\alpha)}$$

Finalement, le sens du champ magnétique, est déterminé par la “règle de la main droite” ! Les unités du champ électrique sont: $[B]=1 \text{ tesla}=1 \text{ T}=1 \frac{\text{N}}{\text{C}\cdot\text{m}} = 1 \frac{\text{kg}\cdot\text{m}}{\text{A}\cdot\text{s}^2\cdot\text{m}} = 1 \frac{\text{kg}}{\text{A}\cdot\text{s}^2}$. De plus, $1 \text{ T}=10^4$ gauss (G). Par exemple, le champ magnétique terrestre vaut $\sim 0.5 \text{ G}$ et le champ principal de l'IRM des HUG vaut 3 T .

4. Densités de charge et de courant

Dans un référentiel galiléen R , on note ρ la **densité de charge** (unités: $\frac{\text{C}}{\text{m}^3}$) et \vec{j} la **densité de courant** (unités: $\frac{\text{A}}{\text{m}^2}$): la charge électrique q contenue dans une partie V de l'espace est donnée par

$$q = \int_V \rho(\vec{x})dV$$

et le courant I traversant une surface S est donné par

$$I = \int_S \vec{j}(\vec{x}) \cdot d\vec{S}$$

REMARQUE 4.1. Par convention, le courant va de la borne positive d'un générateur à la borne négative. Quand les porteurs de charges sont des électrons, ceux-ci se déplacent dans le sens contraire du courant. Le vecteur \vec{j} indique le sens des charges positives.

DÉFINITION 4.2. Soit $\vec{A} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ et S une surface orientée. On définit Φ , le **flux de \vec{A} à travers la surface orientée S** , par

$$\Phi = \int_S \vec{A} \cdot d\vec{S}$$

EXEMPLE 4.3. Considérons, à titre d'exemple, un fluide, de masse volumique constante ρ , dans un tuyau. Soit $\vec{v} : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^3$ la fonction (appelée **champ de vecteur vitesse**) qui en chaque

point $\vec{r} = (x, y, z)$ du tuyau donne la vitesse $\vec{v}(\vec{r}, t) = \vec{v}(x, y, z, t)$ de la particule du fluide se trouvant en ce point \vec{r} au temps t . Le flux de \vec{v} à travers une surface S coupant le tuyau

$$\Phi(t) = \int_S \vec{v}(t) \bullet d\vec{S}$$

est proportionnel au débit:

$$D = \rho\Phi \text{ unités: kg/s}$$

En effet, considérons la situation simple illustrée sur la figure 1. Le champ de vitesse est constant et la surface est plane. En un temps t , la masse de fluide traversant la surface S vaut $\rho \cdot V$ où V désigne le volume du parallélépipède de la figure 1. En d'autres termes

$$D = \frac{\rho vt \sin(\alpha)S}{t} = \rho \cos(\beta)Sv = \rho \vec{S} \bullet \vec{v}$$

où \vec{S} est le vecteur normal à S dont la longueur est égale à la surface S . Remarquons que $\beta = \frac{\pi}{2} - \alpha$.

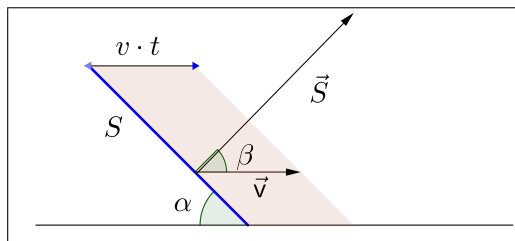


FIGURE 1. Flux

5. Equations de Maxwell

Les équations de Maxwell sont données par

$$\vec{\nabla} \bullet \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \quad (M1)$$

$$\vec{\nabla} \bullet \vec{B} = 0 \quad (M2)$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\dot{\vec{B}} \quad (M3)$$

$$c^2 \vec{\nabla} \times \vec{B} = \dot{\vec{E}} + \frac{\vec{j}}{\epsilon_0} \quad (M4)$$

Le produit scalaire usuel est noté \bullet , le produit vectoriel \times et $\vec{\nabla}$ désigne

$$\vec{\nabla} = \begin{pmatrix} \partial_x \\ \partial_y \\ \partial_z \end{pmatrix}$$

Par conséquent,

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\partial E_1}{\partial x} + \frac{\partial E_2}{\partial y} + \frac{\partial E_3}{\partial z}$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \begin{pmatrix} \frac{\partial B_3}{\partial y} - \frac{\partial B_2}{\partial z} \\ \frac{\partial B_1}{\partial z} - \frac{\partial B_3}{\partial x} \\ \frac{\partial B_2}{\partial x} - \frac{\partial B_1}{\partial y} \end{pmatrix}$$

Finalement, c est la vitesse de la lumière dans le vide

$$c = 299'792'458 \approx 3 \cdot 10^8 \text{ m/s}$$

et ε_0 est la constante dite de **permittivité diélectrique du vide**,

$$\varepsilon_0 = 8.85419 \cdot 10^{-12} \frac{\text{A} \cdot \text{s}}{\text{V} \cdot \text{m}}$$

On utilise aussi la constante

$$k = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \approx 9 \cdot 10^9 \frac{\text{N} \cdot \text{m}^2}{\text{C}^2}$$

Ces valeurs sont valables pour des charges dans le vide. Si les charges ne sont pas dans le vide, la constante ε_0 doit être remplacée par la constante diélectrique ε du milieu qui les sépare. La constante ε vaut, par exemple,

- dans l'eau: $\varepsilon = 80\varepsilon_0$
- dans le verre $\varepsilon = 2$ à $5 \times \varepsilon_0$.

Le principe de conservation de la charge électrique s'énonce

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{j} = -\dot{\rho}$$

Rappelons que la force subie par une charge est donnée par (force de Lorentz)

$$\vec{F} = q \left(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B} \right)$$

6. Formules d'Ostrogradsky et Stokes

Avant d'examiner les solutions des équations de Maxwell dans le vide, nous allons rappeler quelques généralisations du théorème fondamental du calcul différentiel (des cas particuliers du théorème de Stokes) qui permettent d'interpréter les équations de Maxwell.

Soit $\vec{A} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$, $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$ un volume et $\partial\Omega$ le bord de Ω ($\partial\Omega$ est une surface). Alors, moyennant quelques hypothèses de régularité, on a l'égalité

$$\boxed{\int_{\Omega} (\vec{\nabla} \cdot \vec{A}) dV = \int_{\partial\Omega} \vec{A} \cdot d\vec{S}}$$

C'est la **formule d'Ostrogradsky**. En mots, l'intégrale de la divergence d'un champ vectoriel \vec{A} sur un volume Ω est égale au flux de \vec{A} à travers le bord de Ω (*i.e.* la surface "entourant" le volume).

EXEMPLE 6.1. Notons

$$\vec{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \text{ et } \vec{A}(\vec{r}) = \vec{r} \text{ et } \Omega = \left\{ \vec{r} \in \mathbb{R}^3 \mid \|\vec{r}\| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \leq R \right\}$$

Alors

$$\partial\Omega = \left\{ \vec{r} \in \mathbb{R}^3 \mid \|\vec{r}\| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = R \right\}$$

et

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = 3 \text{ et } \int_{\Omega} (\vec{\nabla} \cdot \vec{A}) dV = 3 \frac{4}{3} \pi R^3 = 4\pi R^3$$

Par ailleurs,

$$\int_{\partial\Omega} \vec{A} d\vec{S} = \int_{\partial\Omega} \|\vec{A}\| dS = R 4\pi R^2 = 4\pi R^3$$

Soit $\vec{A} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$, $\Sigma \subseteq \mathbb{R}^3$ une surface orientée et $\partial\Sigma$ le bord de Σ ($\partial\Sigma$ est une courbe fermée). Alors, moyennant quelques hypothèses de régularité, on a l'égalité

$$\boxed{\int_{\Sigma} (\vec{\nabla} \times \vec{A}) \cdot d\vec{S} = \int_{\partial\Sigma} \vec{A} \cdot d\vec{l}}$$

C'est la **formule de Stokes**. En mots, l'intégrale du rotationnel d'un champ vectoriel \vec{A} sur une surface Σ est égale au travail de \vec{A} le long du bord de Σ . Le sens de rotation est donné par la "règle de la main droite".

EXEMPLE 6.2. Notons

$$\vec{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \text{ et } \vec{A}(\vec{r}) = \begin{pmatrix} -y \\ x \\ 0 \end{pmatrix} \text{ et } \Sigma = \left\{ \vec{r} \in \mathbb{R}^3 \mid z = 0 \text{ et } \|\vec{r}\| = \sqrt{x^2 + y^2} \leq R \right\} \text{ avec } \vec{n}_{\Sigma} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

La surface Σ est un disque d'orientation \vec{n}_{Σ} . Alors

$$\partial\Sigma = \left\{ \vec{r} \in \mathbb{R}^3 \mid z = 0 \text{ et } \|\vec{r}\| = \sqrt{x^2 + y^2} = R \right\}$$

et

$$\vec{\nabla} \times \vec{A} = \begin{pmatrix} \partial_x \\ \partial_y \\ \partial_z \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -y \\ x \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \int_{\Sigma} (\vec{\nabla} \times \vec{A}) \cdot d\vec{S} = 2\pi R^2$$

Par ailleurs,

$$\int_{\partial\Sigma} \vec{A} \cdot d\vec{l} = \int_{\partial\Sigma} \|\vec{A}\| dl = R 2\pi R = 2\pi R^2$$

car sur le bord du disque,

$$\vec{r} = R \begin{pmatrix} \cos(\alpha) \\ \sin(\alpha) \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \vec{A}(\vec{r}) = R \begin{pmatrix} -\sin(\alpha) \\ \cos(\alpha) \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \|\vec{A}\| = R$$

7. Interprétation des équations de Maxwell: électrostatique

Nous allons maintenant étudier le contenu physique des équations de Maxwell, en commençant par l'équation qui traduit le principe de conservation de la charge. Nous examinerons ensuite en détail la première équation de Maxwell qui concerne uniquement le champ électrique.

7.1. Conservation de la charge.

Commençons par interpréter la loi de conservation de la charge. Par la formule d'Ostrogradsky, on trouve

$$\dot{q} = \int_V \dot{\rho} dV = - \int_V (\vec{\nabla} \cdot \vec{j}) dV = - \int_{\partial V} \vec{j} \cdot d\vec{S}$$

où q représente la charge enfermée dans le volume V . En d'autres termes, la variation de la charge dans un volume est égale (au signe près) au flux du courant électrique à travers la surface entourant ce volume: q varie seulement si des charges entrent ou quittent V . Imaginons que q soit positive et augmente (des électrons quittent V). Alors, le flux du courant à travers la surface est négatif, puisque le sens \vec{j} est, par convention, opposé au déplacement des charges négatives.

8. Equation de Maxwell M1

Avec la formule d'Ostrogradsky, la première équation de Maxwell devient

$$\frac{q}{\varepsilon_0} = \int_{\Omega} \frac{\rho}{\varepsilon_0} dV = \int_V (\vec{\nabla} \cdot \vec{E}) dV = \int_{\partial\Omega} \vec{E} \cdot d\vec{S}$$

où q est la charge totale enfermée dans le volume Ω . En mots, **le flux du champ électrique à travers une surface fermée est égal, à une constante près, à la charge enfermée à l'intérieur de cette surface.** Ce résultat est dû à Gauss (1777-1855) et est connu sous le nom de théorème de Gauss.

Si V est une sphère de rayon r et si la densité de charge ρ est homogène, alors $\vec{E} \cdot d\vec{S}$ est constant et il vient

$$\frac{q}{\varepsilon_0} = E(\vec{r}) \int_{\partial V} dS = E(\vec{r}) 4\pi r^2 \Rightarrow E(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q}{r^2} \Rightarrow \vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q}{r^3} \vec{r}$$

C'est la loi de Coulomb pour une charge ponctuelle ou pour une charge sphérique homogène de rayon R avec $R \leq r$.

REMARQUE 8.1. Quelques remarques s'imposent.

- (1) Si plusieurs surfaces enferment la même quantité de charges, alors le flux total de \vec{E} à travers toutes ces surfaces sera le même et ceci quelle que soit la façon dont sont distribuées les charges à l'intérieur des surfaces.
- (2) Les charges situées en dehors d'une surface fermée n'ont aucune contribution au flux total de \vec{E} à travers elle.
- (3) Si une surface n'enferme aucune charge, le flux total de \vec{E} (créé exclusivement par des charges extérieures à S dans ce cas) sera nul à travers cette surface.
- (4) Si l'on change la distribution géométrique à l'intérieur d'une surface, on ne change par le résultat du flux total de \vec{E} , mais certainement la valeur locale de \vec{E} en un point P de la surface.

8.1. Potentiel électrique et tension électrique.

DÉFINITION 8.2. On définit le **potentiel électrique** dans le champ d'une charge q (ponctuelle ou sphérique homogène de rayon $R \leq r$) par

$$U(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{q}{r} \quad \text{unités: } 1 \text{ V (Volt)} = 1 \frac{\text{J}}{\text{C}}$$

et la **différence de potentiel** (ou **tension électrique**) entre deux points \vec{r}_A et \vec{r}_B par

$$U_{AB} = U(\vec{r}_A) - U(\vec{r}_B)$$

REMARQUE 8.3. Quelques remarques s'imposent à nouveau.

(1) **La force de Coulomb est conservative** car

$$-\vec{\nabla}U = -\frac{q}{4\pi\epsilon_0} \begin{pmatrix} \partial_x(x^2 + y^2 + z^2)^{-\frac{1}{2}} \\ \partial_y(x^2 + y^2 + z^2)^{-\frac{1}{2}} \\ \partial_z(x^2 + y^2 + z^2)^{-\frac{1}{2}} \end{pmatrix} = -\frac{q}{4\pi\epsilon_0} \begin{pmatrix} -\frac{1}{2}2x(x^2 + y^2 + z^2)^{-\frac{3}{2}} \\ -\frac{1}{2}2y(x^2 + y^2 + z^2)^{-\frac{3}{2}} \\ -\frac{1}{2}2z(x^2 + y^2 + z^2)^{-\frac{3}{2}} \end{pmatrix} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{q}{r^3} \vec{r} = \vec{E}(\vec{r})$$

Nous verrons plus loin que ceci est vrai uniquement pour un champ électrique \vec{E} **statique**.

(2) Pour un chemin quelconque $\mathcal{C}_{A \rightarrow B}$ reliant les points \vec{r}_A à \vec{r}_B , il vient

$$\int_{\mathcal{C}_{A \rightarrow B}} \vec{E} \bullet d\vec{l} = - \int_{\mathcal{C}_{A \rightarrow B}} (\vec{\nabla}U) \bullet d\vec{l} = -(U(\vec{r}_B) - U(\vec{r}_A)) = U(\vec{r}_A) - U(\vec{r}_B) = U_{AB}$$

(3) Le vecteur \vec{E} donne le sens et la direction du mouvement des charges positives. De plus, comme pour tout champ de vecteur, les équipotentielles sont en tout point perpendiculaires au champ \vec{E} .

(4) En particulier, remarquons que

$$U(\vec{r}_A) = \int_{\mathcal{C}_{A \rightarrow \infty}} \vec{E} \bullet d\vec{l}$$

où ∞ désigne un point à l'infini.

(5) L'énergie potentielle d'une charge Q placée dans le champ \vec{E} est donnée par

$$\mathcal{E}_{pot\ ele Q}(\vec{r}_A) = Q \cdot U(\vec{r}_A)$$

Elle est égale au travail de la force électrique quand la charge Q va du point \vec{r}_A à l'infini. Notons q la charge qui engendre le champ \vec{E} . Si q et Q ont le même signe, ce travail est positif et l'énergie potentielle de Q est positive (il faut fournir un travail pour amener Q de l'infini à \vec{r}_A car la force électrique est répulsive). En revanche, si q et Q sont de signes opposés, alors l'énergie potentielle est négative (il faut fournir un travail pour amener Q de \vec{r}_A à l'infini car la force électrique est attractive).

(6) Finalement, remarquons que

$$QU_{AB} = \int_{\mathcal{C}_{A \rightarrow B}} Q\vec{E} \bullet d\vec{l} = -(\mathcal{E}_{pot\ ele Q B} - \mathcal{E}_{pot\ ele Q A}) = -\Delta\mathcal{E}_{pot\ ele Q}$$

Si Q est positive et que le déplacement se fait dans le sens du champ électrique \vec{E} (*i.e.* $\vec{E} \bullet d\vec{l} > 0$), l'énergie potentielle de Q diminue (il faut fournir du travail pour amener Q de B à A). Si Q est négative et que le déplacement se fait dans le sens du champ électrique

\vec{E} , l'énergie potentielle de Q augmente (il faut fournir du travail pour amener Q de A à B).

9. Interprétation des équations de Maxwell: électromagnétisme

Nous allons maintenant interpréter les trois autres équations de Maxwell. La deuxième ne concerne que le champ magnétique. La troisième et la quatrième décrivent les relations entre champ électrique et magnétique.

Historiquement, l'étude des champs magnétiques a été faite empiriquement; les propriétés des aimants naturels (pierre de magnésie) ou celle des aimants artificiels (fer, acier) entraînèrent l'étude du champ magnétique pour lui-même, comme un phénomène indépendant. En 1820, Ørsted fit des expériences fondamentales qui montrèrent qu'un fil parcouru par un courant produit des effets identiques à ceux des aimants, soit sur d'autres aimants, soit sur d'autres fils parcourus par des courants. Dès lors, les phénomènes magnétiques trouvèrent des explications et des lois purent être exprimées (Ampère, Lorentz, Laplace, Faraday, Lenz, Maxwell).

Ce que nous appelons le champ magnétique est en fait un effet relativiste du champ électrique. Un conducteur parcouru par un courant électrique est neutre, mais dans n'importe quel référentiel en mouvement relativement au conducteur, celui-ci apparaît chargé. Par conséquent, un conducteur parcouru par courant exerce une force sur des charges en mouvement relativement au conducteur: c'est la force de Lorentz

$$\vec{F} = q\vec{v} \times \vec{B}$$

10. Equation de Maxwell M2

En appliquant la formule d'Ostrogradsky à la deuxième équation de Maxwell, on déduit que le flux du champ magnétique à travers n'importe quelle surface fermée est nul. De plus, il n'existe pas de monopôles magnétiques ou, en d'autres termes, il n'existe pas de source du champ magnétique.

En effet, de la deuxième équation de Maxwell, il suit en vertu de la formule d'Ostrogradsky,

$$0 = \int_V \vec{\nabla} \cdot \vec{B} dV = \int_{\partial V} \vec{B} \cdot d\vec{S}$$

11. Equation de Maxwell M4

Si le champ électrique est constant, la quatrième équation de Maxwell devient

$$c^2 \vec{\nabla} \times \vec{B} = \frac{1}{\epsilon_0} \vec{j} + \dot{\vec{E}} \xrightarrow{\dot{\vec{E}}=0} \boxed{\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \vec{j}} \text{ où } \mu_0 = \frac{1}{c^2 \epsilon_0} = 4\pi \cdot 10^{-7} \frac{\text{V} \cdot \text{s}}{\text{A} \cdot \text{m}}$$

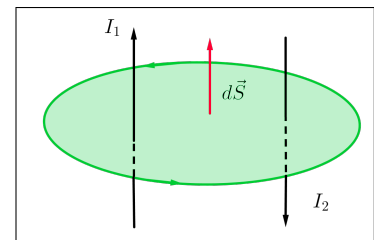
est la constante d'induction, également appelée la constante de perméabilité magnétique du vide.

En vertu de la formule de Stokes,

$$\int_{\partial S} \vec{B} \cdot d\vec{l} = \int_S (\vec{\nabla} \times \vec{B}) \cdot d\vec{S} = \mu_0 \int_S \vec{j} \cdot d\vec{S} = \mu_0 (I_1 - I_2)$$

c'est-à-dire

$$\boxed{\int_{\partial S} \vec{B} \cdot d\vec{l} = \sum_{\text{algébrique}} I_j}$$



C'est le théorème d'Ampère.

11.1. Loi de Biot-Savart.

En vertu de la deuxième équation de Maxwell il vient

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \Rightarrow \exists \vec{A} \text{ tel que } \vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}$$

Le champ vectoriel \vec{A} est appelé le potentiel vecteur du champ magnétique \vec{B} . Remarquons qu'il n'est pas unique puisque

$$\vec{\nabla} \times (\vec{A} + \vec{\nabla}\phi) = \vec{\nabla} \times \vec{A} + \underbrace{\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla}\phi)}_{= \vec{0}} = \vec{\nabla} \times \vec{A}$$

Par conséquent, en vertu de la quatrième équation de Maxwell, il suit si $\dot{\vec{E}} = \vec{0}$, alors

$$\dot{\vec{E}} = 0 \Rightarrow \frac{\vec{j}}{\varepsilon_0} = c^2 \vec{\nabla} \times \vec{B} = c^2 \vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{A}) = c^2 (\vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \cdot \vec{A}) - \Delta \vec{A})$$

où

$$\Delta = \partial_x^2 + \partial_y^2 + \partial_z^2$$

est le Laplacien. Il est toujours possible de remplacer \vec{A} par $\vec{A} + \vec{\nabla}\phi$ sans changer \vec{B} et de choisir la fonction ϕ telle que

$$\vec{0} = \vec{\nabla} \cdot (\vec{A} + \vec{\nabla}\phi) = \vec{\nabla} \cdot \vec{A} - \Delta\phi \Rightarrow \Delta\phi = -\vec{\nabla} \cdot \vec{A}$$

Par conséquent, pour trouver \vec{A} il faut résoudre les équations suivantes

$$\Delta A_k = -\mu_0 j_k \text{ où } \mu_0 = \frac{1}{c^2 \varepsilon_0} = 4\pi \cdot 10^{-7}$$

est la constante de perméabilité magnétique du vide. La solution est donnée par

$$\vec{A}(\vec{r}_1) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \frac{\vec{j}(\vec{r})}{\|\vec{r}_1 - \vec{r}\|} dV$$

Si on a un fil avec un courant

$$I = \vec{j} \cdot d\vec{S} \Rightarrow \vec{j} dV = I d\vec{l} \Rightarrow \vec{A}(\vec{r}_1) = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_{\text{fil}} \frac{1}{\|\vec{r}_1 - \vec{r}\|} d\vec{l}$$

et le champ magnétique \vec{B} est donné par

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_{\text{fil}} \frac{d\vec{l} \times (\vec{r}_1 - \vec{r})}{\|\vec{r}_1 - \vec{r}\|^3}$$

C'est la loi de Biot-Savart.

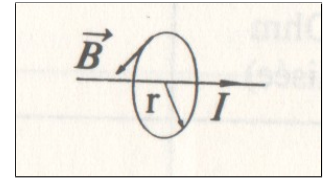
11.2. Champ magnétique créé par un courant rectiligne infini.

Imaginons un fil rectiligne infini traversé par un courant constant et une surface S qui est un disque de rayon r perpendiculaire au fil. En vertu de la loi de Biot-Savart, nous savons que le champ magnétique est tangent au cercle. De plus, en vertu du théorème d'Ampère,

$$B \cdot 2\pi r = \int_{\partial S} \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 I$$

c'est-à-dire

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}$$

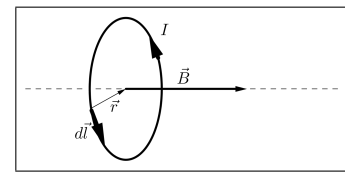


(Dessin: table CRM)

11.3. Champ magnétique créé par une spire unique.

En appliquant la loi de Biot-Savart, on trouve que le champ magnétique au centre de la spire parcourue par un courant I vaut

$$\|\vec{B}\| = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_{\odot} \frac{d\vec{l} \times \vec{r}}{r^3} = \frac{\mu_0 I}{4\pi r^2} 2\pi r = \mu_0 \frac{I}{2r}$$



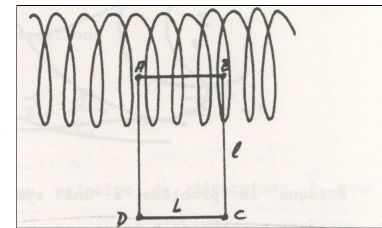
11.4. Champ magnétique créé par une bobine longue.

On considère un solénoïde long de longueur l , c'est-à-dire un fil enroulé autour d'un cylindre (une bobine). On trouve que

$$\int_C^D \vec{B} \cdot d\vec{l} = 0$$

si \overline{BC} est très grand. Par ailleurs, si la bobine est longue (*i.e.* l est grand), alors

$$\int_B^C \vec{B} \cdot d\vec{l} = - \int_D^A \vec{B} \cdot d\vec{l}$$



(Dessin: école de physique UNIGE)

Par conséquent,

$$\int_{ABCD} \vec{B} \cdot d\vec{l} = \int_A^B \vec{B} \cdot d\vec{l} = BL$$

et en vertu du théorème d'Ampère,

$$BL = \int_{ABCD} \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 \int_{S_{ABCD}} \vec{j} \cdot d\vec{S} = \mu_0 \frac{n}{l} LI$$

où $\frac{n}{l}$ est le nombre de tours par mètre. Il suit que le champ magnétique au centre de la bobine vaut

$$B = \mu_0 \frac{nI}{l}$$

12. Force de Laplace

Si les charges en mouvement sont les électrons d'un courant dans un fil, leur vitesse est très lente. La force de Lorentz a beau être infime sur chaque électron, elle développe néanmoins un effet d'ensemble très important par suite du très grand nombre d'électrons en cause.



(Dessin: Collège de Candolle)

En régime stationnaire,

$$I = \frac{dQ}{dt} \Rightarrow dQ = I dt \text{ et } d\vec{F} = dQ (\vec{v} \times \vec{B}) = I dt (\vec{v} \times \vec{B}) \stackrel{\vec{v} = \frac{d\vec{l}}{dt}}{=} I (d\vec{l} \times \vec{B})$$

et pour un fil rectiligne de longueur l ,

$$\boxed{\vec{F} = I (\vec{l} \times \vec{B})}$$

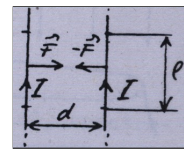
C'est la force de Laplace. La plupart des applications de l'électricité qui font intervenir des forces reposent sur cette relation.

REMARQUE 12.1. Comme la force de Lorentz ne travaille pas, l'intensité du courant n'est pas modifiée par le champ où se trouve le fil.

12.1. Définition de l'Ampère.

L'expérience de la balance de courant permet de définir l'Ampère à partir des trois autres unités fondamentales, soit le m, le kg et la s. Considérons deux fils rectilignes infinis parallèles séparés par une distance $d = 1$ m. Alors (voir figure ci-contre),

$$F = IlB = Il \frac{\mu_0 I}{2\pi d} = \mu_0 \frac{I^2}{2\pi d}$$



(Dessin: Collège de Candolle)

La définition officielle de l'Ampère est donnée par le BIPM⁽¹⁾:

L'ampère est l'intensité d'un courant constant qui, maintenu dans deux conducteurs parallèles, rectilignes, de longueur infinie, de section circulaire négligeable et placés à une distance de 1 mètre l'un de l'autre dans le vide, produirait entre ces conducteurs une force égale à $2 \cdot 10^{-7}$ newton par mètre de longueur.

13. Equation de Maxwell M3

En appliquant la formule de Stokes à la troisième équation de Maxwell, on obtient

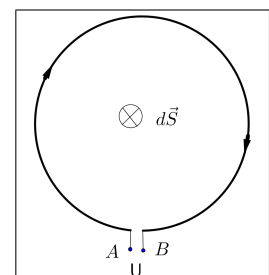
$$-\dot{\Phi} = -\frac{d}{dt} \int_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = -\int_S \dot{\vec{B}} \cdot d\vec{S} = \int_S (\vec{\nabla} \times \vec{E}) \cdot d\vec{S} = \int_{\partial S} \vec{E} \cdot d\vec{l}$$

où Φ est le flux magnétique à travers la surface S .

Imaginons une boucle de fil sur une table reliée à un voltmètre. Alors, la tension électrique U_{AB} mesurée par le voltmètre est donnée par

$$-\dot{\Phi} = -\frac{d}{dt} \int_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = \int_{A \rightarrow B} \vec{E} \cdot d\vec{l} = U_{ind} \Rightarrow \boxed{U_{ind} = -\dot{\Phi}}$$

C'est le principe d'induction: un champ magnétique variable induit une tension électrique égale, au signe près, à la variation du flux magnétique. Le phénomène d'induction a été découvert indépendamment par Faraday et Henry. Il est à la base de nombreux dispositifs actuellement utilisés: générateurs électriques, transformateurs, etc.



¹Bureau International des Poids et Mesures, <http://www.bipm.org>

Pour déterminer le sens du courant induit, il faut raisonner comme suit. Imaginons un champ magnétique homogène vertical

$$\vec{B}(t) = (0, 0, -B(t)) \Rightarrow \dot{\vec{B}}(t) = (0, 0, -\dot{B}(t))$$

et supposons que S soit le disque

$$S = \left\{ (x, y, z) \mid z = 0 \text{ et } x^2 + y^2 < R^2 \right\}$$

dont nous choisissons l'orientation: $d\vec{S} = \otimes$ (ainsi, $\vec{B} \bullet d\vec{S} > 0$). Alors,

$$- \int_S \dot{\vec{B}} \bullet d\vec{S} = -\dot{B}(t)\pi r^2 = \int_{\odot\partial S} \vec{E} \bullet d\vec{l}$$

$$d\vec{S} = \otimes \Rightarrow \int_{\odot}$$

Par conséquent, si B augmente (*i.e.* $\dot{B} > 0$), le champ \vec{E} le long du fil tourne dans le sens trigonométrique \odot et le courant, qui indique le débit des charges positives, tourne également dans le sens trigonométrique \odot ⁽²⁾. Par conséquent, le champ magnétique créé par le courant induit rentre dans le plan $\vec{B}_{ind} = \otimes$ et s'oppose à la variation de flux magnétique.

Toutes les situations sont résumées dans le tableau ci-contre (en haut pour le choix $d\vec{S} = \otimes$ et en bas pour le choix $d\vec{S} = \odot$).

Nous constatons que le champ magnétique créé par le courant induit s'oppose à la variation du flux inducteur. Cela revient à dire que **tout phénomène d'induction s'oppose à sa cause**. C'est la loi de Lenz. Remarquons que le contraire serait absurde, car une petite variation de flux impliquerait la création d'un flux infini !

\vec{B}	$d\vec{S}$	$\ \vec{B}\ $	$-\dot{\Phi}$	\vec{I}	\vec{B}_{ind}
\otimes	\otimes	\nearrow	$-$	\odot	\otimes
\otimes	\otimes	\searrow	$+$	\odot	\otimes
\odot	\otimes	\nearrow	$+$	\odot	\otimes
\odot	\otimes	\searrow	$-$	\odot	\otimes

$$d\vec{S} = \odot \Rightarrow \int_{\odot}$$

\vec{B}	$d\vec{S}$	$\ \vec{B}\ $	$-\dot{\Phi}$	\vec{I}	\vec{B}_{ind}
\otimes	\odot	\nearrow	$+$	\odot	\otimes
\otimes	\odot	\searrow	$-$	\odot	\otimes
\odot	\odot	\nearrow	$-$	\odot	\otimes
\odot	\odot	\searrow	$+$	\odot	\otimes

REMARQUE 13.1. Le fait que

$$\int_{\odot} \vec{E} \bullet d\vec{l} \neq 0$$

quand le flux magnétique n'est pas constant, montre que \vec{E} n'est pas conservatif, c'est-à-dire qu'il n'est pas le gradient d'un potentiel. Par conséquent, la tension induite n'est pas une différence de potentiel. Au lieu de tension induite, on utilise parfois la terminologie "force électro-motrice". La boucle représentée plus haut agit comme un générateur. Par conséquent, la tension U_{AB} est positive quand le courant induit tourne dans le sens trigonométrique \odot et négative quand le courant induit tourne dans le sens horaire \ominus . Il suit que

$$\begin{cases} U_{AB} = \dot{\Phi} \text{ si } d\vec{S} = \otimes \\ U_{AB} = -\dot{\Phi} \text{ si } d\vec{S} = \odot \end{cases}$$

13.1. Les courants de Foucault.

Tout corps conducteur (métal) soumis à un flux magnétique variable est le siège de courants induits. La conduction n'étant pas parfaite (sauf dans les supraconducteurs), les courants créent une agitation thermique des atomes du conducteur (effet Joule). De l'énergie électrique est transformée en énergie thermique. C'est en général, dans un appareil à induction, une cause de perte

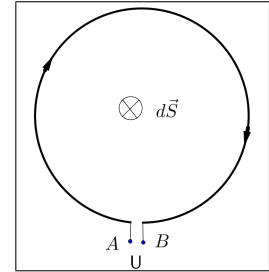
²les électrons, qui ont une charge négative, tournent dans le sens horaire \ominus

d'énergie (par exemple, échauffement des transformateurs). Pour diminuer les courants induits dans les noyaux de fer des enroulements, on découpe le métal en fines lamelles couvertes d'isolants. Application: freinage par courants de Foucault.

13.2. Auto-induction.

Reprenons l'exemple d'une boucle de fil. Supposons qu'elle soit parcourue par un courant I tournant dans le sens horaire \odot et adoptons la convention

$$\begin{cases} I > 0 \text{ si } I \odot \\ I < 0 \text{ si } I \otimes \end{cases}$$



Le courant crée un champ magnétique perpendiculaire au plan de la boucle dont le sens est donné par

$$\begin{cases} I \odot \Rightarrow \vec{B} = \otimes \\ I \otimes \Rightarrow \vec{B} = \odot \end{cases}$$

et ce champ magnétique est proportionnel à I . De plus, le flux magnétique est proportionnel au champ magnétique et donc également au courant. Le facteur de proportionnalité est appelé le coefficient d'auto-induction et se note L :

$$\Phi = LI \text{ avec } d\vec{S} = \otimes \quad \text{Unités: } \left[\frac{V \cdot s}{A} \right] = [H] \text{ (Henry)}$$

Il dépend seulement de la forme géométrique du conducteur. En vertu de la loi de Faraday,

$$U_{ind} = -\dot{\Phi} = -L\dot{I} \Rightarrow \boxed{U_{AB} = L\dot{I}}$$

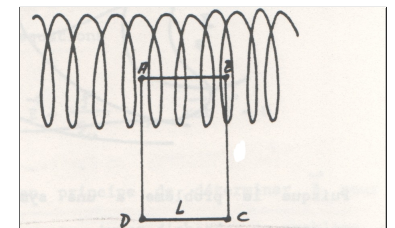
EXEMPLE 13.2. On considère à nouveau un solénoïde long, c'est-à-dire un fil enroulé autour d'un cylindre (une bobine). On trouve que le flux magnétique à travers la bobine vaut

$$\Phi = \pi r^2 \mu_0 \frac{nI}{l}$$

où r est le rayon de la bobine et l sa longueur. Par conséquent, la tension induite par une variation du courant, vaut

$$U_{ind} = -n\dot{\Phi} = -\mu_0 \frac{n^2 S}{l} \dot{I} = -L\dot{I} \Rightarrow \boxed{L = \mu_0 n^2 \frac{S}{l}}$$

où S est la surface de la section de la bobine et n le nombre de spires.



(Dessin: école de physique UNIGE)

REMARQUE 13.3. Comme nous l'avons déjà mentionné, en raison du signe $-$ dans le loi de Faraday, la tension induite s'oppose aux variations de courant. Une bobine dans un circuit électrique joue donc le même rôle que la masse inertielle en dynamique. La masse s'oppose aux variations de vitesse puisque en vertu de la deuxième loi de Newton

$$\dot{v} = a = \frac{F_{res}}{m}$$

De façon similaire, une bobine s'oppose aux variations de courant.

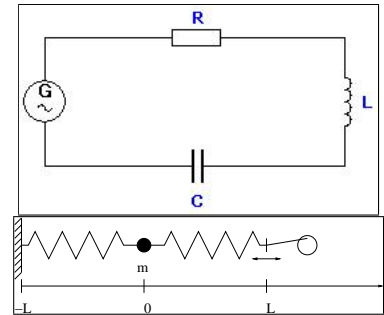
Remarquons que l'équation pour le courant dans un circuit RLC série est donnée par

$$L\ddot{I} + R\dot{I} + \frac{I}{C} = \dot{U}_{\text{générateur}}$$

où L est le coefficient d'auto-induction de la bobine, R la valeur de la résistance, C la capacité du condensateur et $U_{\text{générateur}}$ la tension du générateur. Par ailleurs, l'équation du mouvement d'un oscillateur harmonique forcé est donnée par

$$m\ddot{x} + \eta\dot{x} + 2kx = ky(t)$$

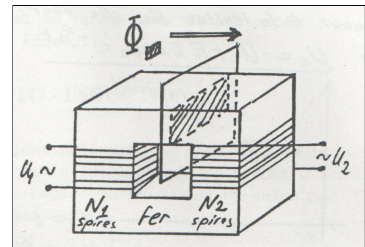
où m est la masse, η est le coefficient de frottement et $2k$ la constante du système des deux ressorts. On remarque que ces équations sont similaires et que L joue le rôle de m .



14. Applications de l'induction

14.1. Les transformateurs.

Un transformateur se compose de deux enroulements, le primaire et le secondaire, bobinés sur une carcasse métallique (fer doux) qui réalise entre eux un couplage inductif. En appliquant une tension alternative (U_1) au primaire, on y fait circuler un courant alternatif (I_1) qui provoque sans le fer un champ magnétique B (donc un flux magnétique) alternatif. Ce dernier crée la tension U_2 dans le secondaire par induction.



(Dessin: Collège de Candolle)

REMARQUE 14.1. Nous supposons que nous avons des transformateurs idéaux, c'est-à-dire que nous admettons que la résistance ohmique des circuits est négligeable et que les pertes de flux sont aussi négligeables.

Le flux d'induction Φ à travers toute section du circuit magnétique est le même à chaque instant. Ainsi

$$\begin{cases} \Phi_1 \text{ à travers la bobine 1} = N_1\Phi \Rightarrow \dot{\Phi}_1 = N_1\dot{\Phi} \\ \Phi_2 \text{ à travers la bobine 2} = N_2\Phi \Rightarrow \dot{\Phi}_2 = N_2\dot{\Phi} \end{cases}$$

En considérant la transformation dans le sens $1 \rightarrow 2$, on trouve

$$U_2 = U_{\text{ind}2} = -\dot{\Phi}_2 = -N_2\dot{\Phi}$$

et en considérant la transformation dans le sens $2 \rightarrow 1$, on trouve

$$U_1 = U_{\text{ind}1} = -\dot{\Phi}_1 = -N_1\dot{\Phi}$$

Le transformateur fonctionnant dans les deux sens pour un même Φ , il suit que

$$\dot{\Phi} = -\frac{U_2}{N_2} = -\frac{U_1}{N_1} \Rightarrow \boxed{\frac{U_2}{U_1} = \frac{N_2}{N_1}}$$

Les transformateurs sont d'un usage extrêmement courant, dans toutes les gammes de puissance: radio, T.V., allumage de voiture, industrie, centrales et réseaux électriques, four à induction, etc.

15. Equations d'onde

Dans le vide ($\rho = 0$ et $\vec{j} = \vec{0}$), les équation de Maxwell deviennent,

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 0 \quad (M1)$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \quad (M2)$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\dot{\vec{B}} \quad (M3)$$

$$c^2 \vec{\nabla} \times \vec{B} = \dot{\vec{E}} \quad (M4)$$

En dérivant la troisième équation par rapport à t , on obtient

$$-\ddot{\vec{B}} = \partial_t (\vec{\nabla} \times \vec{E}) = \vec{\nabla} \times \dot{\vec{E}} \stackrel{CM4}{=} \vec{\nabla} \times (c^2 \vec{\nabla} \times \vec{B}) = c^2 \left(\underbrace{\vec{\nabla} (\vec{\nabla} \cdot \vec{B})}_{\stackrel{CM2_0}{=}} - (\vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla}) \vec{B} \right)$$

c'est-à-dire

$$\frac{1}{c^2} \ddot{\vec{B}} = \Delta \vec{B}$$

où

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

est le Laplacien.

En dérivant la quatrième équation par rapport à t , on obtient

$$-\ddot{\vec{E}} = \partial_t (c^2 \vec{\nabla} \times \vec{B}) = c^2 \vec{\nabla} \times \dot{\vec{B}} \stackrel{CM3}{=} \vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{E}) = c^2 \left(\underbrace{\vec{\nabla} (\vec{\nabla} \cdot \vec{E})}_{\stackrel{CM1_0}{=}} - (\vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla}) \vec{E} \right)$$

c'est-à-dire

$$\frac{1}{c^2} \ddot{\vec{E}} = \Delta \vec{E}$$

REMARQUE 15.1. Les équations pour \vec{E} et \vec{B} sont des équations d'onde comme nous allons le voir. En introduisant le d'Alembertien

$$\square = \frac{\partial^2}{\partial t^2} - c^2 \Delta$$

Les équations pour \vec{E} et \vec{B} deviennent

$$\square \vec{E} = 0 \text{ et } \square \vec{B} = 0$$

Cherchons pour \vec{E} une solution de la forme

$$\vec{E}(\vec{x}, t) = \vec{E}_0(\vec{k}) e^{i(\vec{k} \cdot \vec{x} + \omega t)} = \vec{E}_0(\vec{k}) \left(\cos(\vec{k} \cdot \vec{x} + \omega t) + i \sin(\vec{k} \cdot \vec{x} + \omega t) \right)$$

Alors

$$\square \vec{E} = -(\omega^2 - c^2 \|\vec{k}\|^2) \vec{E} = 0 \Rightarrow \omega = \pm c \|\vec{k}\|$$

C'est une onde. Calculons sa vitesse: sa longueur d'onde est donnée par

$$\lambda = \frac{2\pi}{\|\vec{k}\|}$$

et sa période par

$$T = \frac{2\pi}{\omega}$$

Ainsi, sa vitesse vaut

$$v = \frac{\lambda}{T} = \frac{\frac{2\pi}{\|\vec{k}\|}}{\frac{2\pi}{\omega}} = \frac{\omega}{\|\vec{k}\|} = \pm c$$

Pour une condition initiale donnée $\vec{E}(\vec{x}, 0)$ pour laquelle la transformée de Fourier existe

$$\vec{E}(\vec{x}, 0) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}} \int \vec{E}_0(\vec{k}) e^{i\vec{k} \cdot \vec{x}} d^3 k$$

la solution est donnée par

$$\vec{E}(\vec{x}, t) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}} \int \vec{E}_0(\vec{k}) e^{i(\vec{k} \cdot \vec{x} + c\|\vec{k}\|t)} d^3 k$$

APPENDICE A

Fonctions à plusieurs variables

Les notes de cours qui suivent ne contiennent ni théorèmes ni démonstrations. Elles constituent une introduction non formelle à l'analyse des fonctions à plusieurs variables destinée aux élèves du collège de Genève en OS Physique-Application des mathématiques.

1. Dérivées partielles

Considérons, à titre d'exemple, la fonction $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$f(x, y) = (x^2 + y^2 - 1)^2 + 1$$

Son graphe est une surface de \mathbb{R}^3 . On peut visualiser son graphe avec *Octave*. L'exécution du script

```
1 x = -1.1:0.1:1.1;
2 y = -1.1:0.1:1.1;
3 [xx, yy] = meshgrid(x, y);
4 zz = (xx.^2 + yy.^2 - 1).^2 + 1;
5 surf(xx, yy, zz)
6 axis([-1.1 1.1 -1.1 1.1 0 4])
7 xlabel('x')
8 ylabel('y')
9 zlabel('z')
10 view(66, 26)
11 print exemple.png
```

donne la graphe de la figure 1.

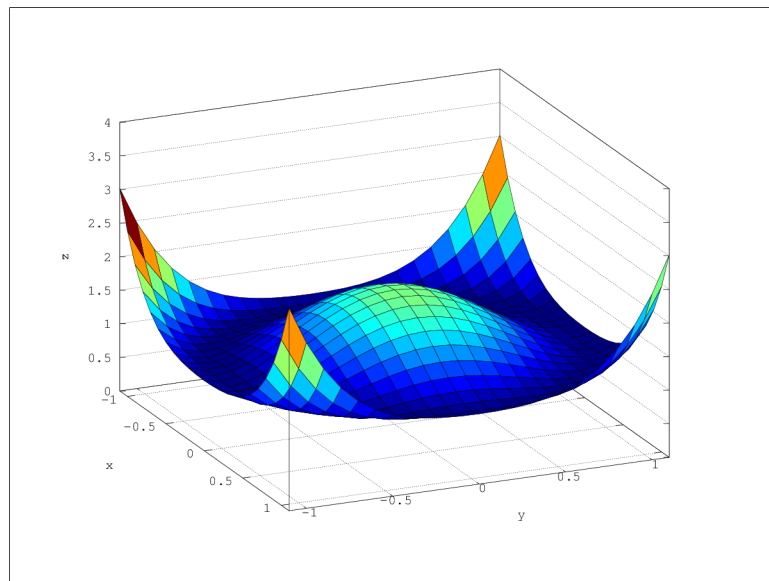


FIGURE 1. Le graphe de la fonction $f(x, y) = (x^2 + y^2 - 1)^2 + 1$.

On définit la **dérivée partielle** de f par rapport à la variable x , que l'on note

$$\frac{\partial f}{\partial x} \text{ ou } \partial_x f$$

comme la dérivée de f obtenue en considérant y comme une constante numérique:

$$(\partial_x f)(x, y) = 2(x^2 + y^2 - 1)2x$$

De même, la dérivée partielle de f par rapport à la variable y est obtenue en dérivant f par rapport à y en considérant x comme une constante numérique:

$$(\partial_y f)(x, y) = 2(x^2 + y^2 - 1)2y$$

2. Gradient

On définit le **gradient** de f , que l'on note

$$\text{grad}(f) \text{ ou } \vec{\nabla} f$$

comme la fonction de \mathbb{R}^2 dans \mathbb{R}^2 donnée par

$$(\vec{\nabla} f)(x, y) = \begin{pmatrix} (\partial_x f)(x, y) \\ (\partial_y f)(x, y) \end{pmatrix}$$

Pour notre exemple, nous obtenons

$$(\vec{\nabla} f)(x, y) = \begin{pmatrix} 2(x^2 + y^2 - 1)2x \\ 2(x^2 + y^2 - 1)2y \end{pmatrix} = 4(x^2 + y^2 - 1) \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Une **courbe de niveau** est une fonction dérivable $\vec{c} : I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ telle que $f(\vec{c}(t))$ est constante sur I , c'est-à-dire

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{d}{dt} f(\vec{c}(t)) = \frac{d}{dt} f(c_1(t), c_2(t)) = (\partial_x f)(\vec{c}(t)) \dot{c}_1(t) + (\partial_y f)(\vec{c}(t)) \dot{c}_2(t) \\ &= \begin{pmatrix} (\partial_x f)(\vec{c}(t)) \\ (\partial_y f)(\vec{c}(t)) \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} \dot{c}_1(t) \\ \dot{c}_2(t) \end{pmatrix} = (\vec{\nabla} f)(\vec{c}(t)) \bullet \dot{\vec{c}}(t) \end{aligned}$$

ce qui montre que $\vec{\nabla} f$ est un vecteur perpendiculaire aux courbes de niveau.

Pour représenter graphiquement une fonction \vec{g} de \mathbb{R}^2 dans \mathbb{R}^2 , on peut afficher en quelques points $(x; y)$ choisis du plan une flèche dont les coordonnées sont les coordonnées de $\vec{g}(x, y)$ et dont l'origine est placée au point $(x; y)$.

Par exemple, le script *Octave*

```

1 x = -1.3:0.2:1.3;
2 y = -1.3:0.2:1.3;
3 [xx, yy] = meshgrid(x, y);
4 vx = 4*(xx.^2 + yy.^2 - 1) .* xx;
5 vy = 4*(xx.^2 + yy.^2 - 1) .* yy;
6 quiver(xx, yy, vx, vy, 5)
7 axis([-1.5 1.5 -1.5 1.5])
8 xlabel('x')
9 ylabel('y')
10 print exemplegrad.png
```

donne le graphique de la figure 2

Dans notre exemple, les courbes de niveau sont des cercles. Le gradient est donc bien en tout point perpendiculaire à une courbe de niveau.

Le gradient $(\vec{\nabla})(f)(x, y)$ est nul si $f(x, y)$ est un minimum ou un maximum local. De plus, il “indique la direction de la plus forte pente”.

Dans notre exemple, f admet un maximum local en $(0; 0)$ et des minimas locaux sur le cercle de rayon 1 centré à l’origine. Or

$$(\vec{\nabla}f)(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = 0 = y \text{ ou } x^2 + y^2 = 1$$

Un exemple bien connu de fonction de \mathbb{R}^2 dans \mathbb{R} est une carte de géographie qui donne l’altitude de chaque point $(x; y)$.

3. Intégrale curviligne

Soit $\vec{c} : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^3$ continûment dérivable et $\vec{F} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ continue. Alors, pour N un “grand” nombre entier

$$A_{\vec{F}} \approx \sum_{i=0}^{N-1} (\vec{c}(a + (i+1)\delta) - \vec{c}(a + i\delta)) \bullet \vec{F}(\vec{c}(a + i\delta)) \text{ où } \delta = \frac{b-a}{N}$$

donne le travail $A_{\vec{F}}$ de la force \vec{F} pour un déplacement du point $A = \vec{c}(a)$ au point $B = \vec{c}(b)$ le long de la courbe \vec{c} (voir figure 3). Or

$$\sum_{i=0}^{N-1} (\vec{c}(a + (i+1)\delta) - \vec{c}(a + i\delta)) \bullet \vec{F}(\vec{c}(a + i\delta)) = \sum_{i=0}^{N-1} \frac{\vec{c}(a + (i+1)\delta) - \vec{c}(a + i\delta)}{\delta} \bullet \vec{F}(\vec{c}(a + i\delta)) \delta$$

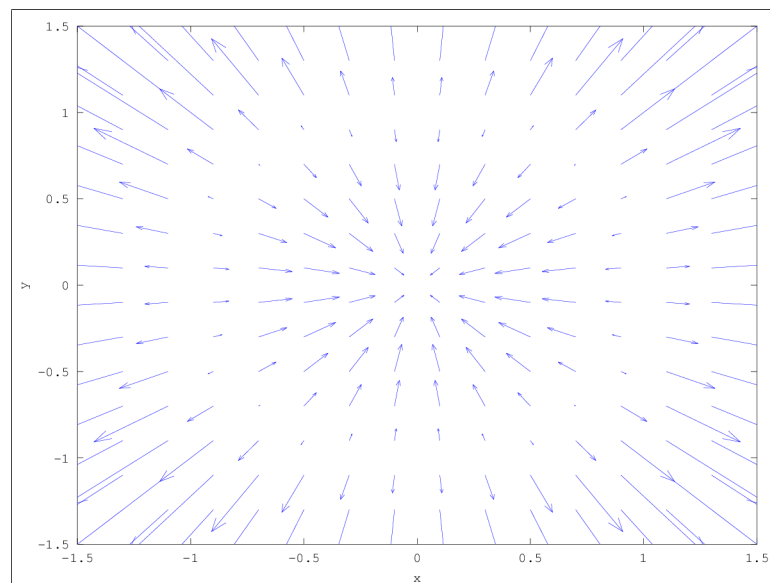
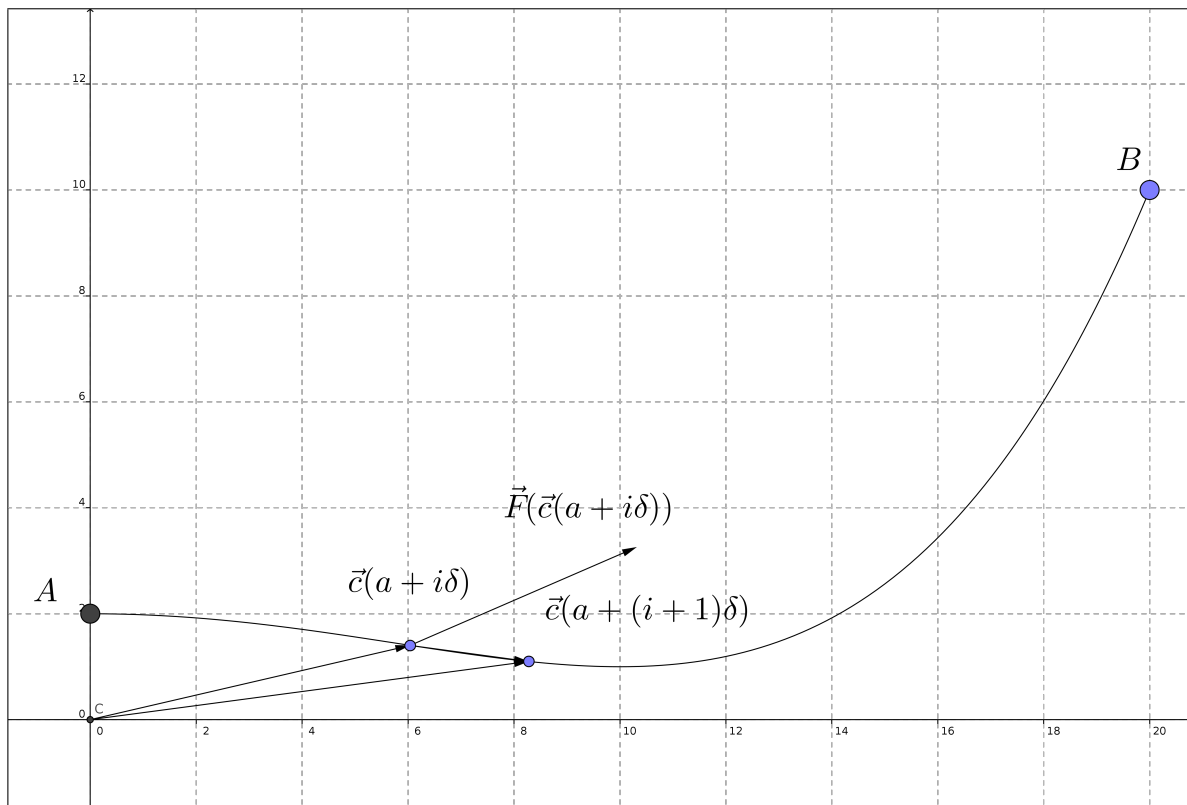


FIGURE 2. Le gradient de la fonction $f(x, y) = (x^2 + y^2 - 1)^2 + 1$.

FIGURE 3. Le travail d'une force \vec{F} .

qui est, si N est “suffisamment” grand (et donc δ “suffisamment petit”), une bonne approximation de l'aire délimitée par le graphe de la fonction de \mathbb{R} dans \mathbb{R} définie par

$$\dot{\vec{c}}(t) \bullet \vec{F}(\vec{c}(t))$$

l'axe des abscisses et les droites verticales $t = a$ et $t = b$ (en comptant négativement l'aire des surfaces en-dessous de l'axe des abscisses). En d'autres termes, le travail est donné par l'intégrale

$$A_{\vec{F}} = \int_a^b \dot{\vec{c}}(t) \bullet \vec{F}(\vec{c}(t)) dt$$

La formule donnée ci-dessus dépend uniquement de la courbe reliant $\vec{c}(a)$ à $\vec{c}(b)$ (c'est-à-dire de $\mathcal{C} = \vec{c}([a, b])$). Elle ne dépend pas de la paramétrisation de \mathcal{C} . En effet, soit $s : [t_0, t_1] \rightarrow [a, b]$ continûment dérivable. Alors, $\vec{h}(t) = \vec{c}(s(t))$ est une autre paramétrisation de \mathcal{C} . En d'autres termes, $\vec{h}([t_0, t_1]) = \mathcal{C}$. De plus,

$$\dot{\vec{h}}(t) = \dot{\vec{c}}(s(t)) \cdot \dot{s}(t)$$

Alors, par la formule d'intégration par changement de variable, il vient

$$\int_{t_0}^{t_1} \dot{\vec{h}}(t) \bullet \vec{F}(\vec{h}(t)) dt = \int_{t_0}^{t_1} \dot{\vec{c}}(s(t)) \cdot \dot{s}(t) \bullet \vec{F}(\vec{c}(s(t))) dt = \int_a^b \dot{\vec{c}}(s) \bullet \vec{F}(\vec{c}(s)) ds$$

Soit $\mathcal{C}_{A \rightarrow B}$ une courbe de l'espace reliant A à B . Il suit de ce qui précède, que nous pouvons définir

$$\int_{\mathcal{C}_{A \rightarrow B}} \vec{F} \bullet d\vec{l} = \int_a^b \vec{F}(\vec{c}(t)) \bullet \dot{\vec{c}}(t) dt$$

pour une paramétrisation quelconque $\vec{c}: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^3$ de $\mathcal{C}_{A \rightarrow B}$.

Si la force \vec{F} est **conservative**, c'est-à-dire s'il existe une fonction $U: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ continûment dérivable telle que

$$\vec{F}(\vec{x}) = -(\vec{\nabla}U)(\vec{x})$$

(dans ce cas la fonction U est appelée le **potentiel**) alors

$$\begin{aligned} A_{\vec{F}} &= \int_a^b \dot{\vec{c}}(t) \bullet \vec{F}(\vec{c}(t)) dt = - \int_a^b \dot{\vec{c}}(t) \bullet (\vec{\nabla}U)(\vec{c}(t)) dt \\ &= - \int_a^b \frac{d}{dt} U(\vec{c}(t)) dt = -(U(\vec{c}(b)) - U(\vec{c}(a))) = U(A) - U(B) \end{aligned}$$

ce qui montre que le travail de la force \vec{F} ne dépend pas du chemin reliant $A = \vec{c}(a)$ à $B = \vec{c}(b)$

4. Généralisations du théorème fondamental du calcul différentiel

DÉFINITION 4.1. On définit

$$\vec{\nabla} = \begin{pmatrix} \partial_x \\ \partial_y \\ \partial_z \end{pmatrix}$$

Soit $\vec{A}: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$. On définit

(1) la **divergence** de \vec{A} par

$$\text{div}(\vec{A}) = \vec{\nabla} \bullet \vec{A} = \partial_x A + \partial_y A + \partial_z A$$

(2) le **rotationnel** de \vec{A} par

$$\text{rot}(\vec{A}) = \vec{\nabla} \times \vec{A} = \begin{pmatrix} \partial_y A_3 - \partial_z A_2 \\ \partial_z A_1 - \partial_x A_3 \\ \partial_x A_2 - \partial_y A_1 \end{pmatrix}$$

4.1. Formule de Green.

Nous commençons par la **formule de Green**. Soit D un ouvert de \mathbb{R}^2 x et y simple, c'est-à-dire défini par deux intervalles ouverts I_x et I_y et 4 fonctions continûment dérivables x_{\pm} et y_{\pm} de \mathbb{R} dans \mathbb{R} telles que

$$D = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in I_x, y_-(x) < y < y_+(x) \right\} = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \in I_y, x_-(y) < x < x_+(y) \right\}$$

On définit le bord ∂D de D en remplaçant les inégalités par des égalités. Soit \vec{A} une fonction continûment dérivable de \mathbb{R}^2 dans \mathbb{R}^2 . Alors (formule de green),

$$\int_D \left(\frac{\partial A_2}{\partial x} - \frac{\partial A_1}{\partial y} \right) dS = \int_{\partial D \circlearrowleft} \vec{A} \bullet d\vec{l}$$

En effet, en vertu du théorème de Fubini et du théorème fondamental du calcul différentiel,

$$\begin{aligned} & \int_D \left(\frac{\partial A_2}{\partial x} - \frac{\partial A_1}{\partial y} \right) dS \\ &= \int_{y \in I_y} \left(\int_{x(y)}^{x_+(y)} \frac{\partial A_2}{\partial x} dx \right) dy - \int_{x \in I_x} \left(\int_{y(x)}^{y_+(x)} \frac{\partial A_1}{\partial y} dy \right) dx \\ &= \int_{y \in I_y} (A_2(x_+(y), y) - A_2(x_-(y), y)) dy - \int_{x \in I_x} (A_1(x, y_+(x)) - A_1(x, y_-(x))) dx \end{aligned}$$

Par définition,

$$\int_{\partial D \circlearrowleft} \vec{A} \bullet d\vec{l} = \int_{\partial D \circlearrowleft} A_1 d\vec{l}_1 + \int_{\partial D \circlearrowleft} A_2 d\vec{l}_2$$

Notons $I_x =]g, d[$ et

$$\vec{v}_{\pm}(t) = \begin{pmatrix} t \\ y_{\pm}(t) \end{pmatrix} \Rightarrow \dot{\vec{v}}_{\pm}(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ \dot{y}_{\pm}(t) \end{pmatrix}, \quad \vec{h}_{g \setminus d}(t) = \begin{pmatrix} g \setminus d \\ t \end{pmatrix} \Rightarrow \dot{\vec{h}}_{g \setminus d}(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Avec ces notations,

$$\begin{aligned} \int_{\partial D \circlearrowleft} A_1 d\vec{l}_1 &= \int_g^d A_1(x, y_-(x)) \dot{\vec{v}}_-(x)_1 dx + \int_{y(d)}^{y_+(d)} A_1(d, y) \dot{\vec{h}}_d(y)_1 dy \\ &+ \int_d^g A_1(x, y_+(x)) \dot{\vec{v}}_+(x)_1 dx + \int_{y_+(g)}^{y_-(g)} A_1(g, y) \dot{\vec{h}}_g(y)_1 dy \\ &= \int_g^d (A_1(x, y_-(x)) - A_1(x, y_+(x))) dx \end{aligned}$$

De manière similaire, on montre que

$$\int_{\partial D \circlearrowleft} A_2 d\vec{l}_2 = \int_{y \in I_y} (A_2(x_+(y), y) - A_2(x_-(y), y)) dy$$

ce qui achève la démonstration de la formule de Green.

4.2. Formule de Stokes.

Soit S une surface de \mathbb{R}^3 . Pour simplifier, nous supposons qu'il existe un ouvert x et y -simple D de \mathbb{R}^2 et une fonction

$$\begin{aligned} \vec{\sigma} : \mathbb{R}^2 &\rightarrow \mathbb{R}^3 \\ (u, v) &\mapsto \sigma(u, v) \end{aligned}$$

deux fois continûment dérivable sur D , injective sur \overline{D} telle que

$$S = \sigma(\overline{D})$$

(σ est une paramétrisation de S). Nous supposons également que $\|\partial_u \vec{\sigma} \times \partial_v \vec{\sigma}\| \neq 0$ pour tout $(u, v) \in \overline{D}$ et que $\frac{\partial_u \vec{\sigma} \times \partial_v \vec{\sigma}}{\|\partial_u \vec{\sigma} \times \partial_v \vec{\sigma}\|}$ est continue sur \overline{D} .

Notons encore $\gamma : [0, 1] \rightarrow \partial D$ une paramétrisation du bord de D dans le sens trigonométrique comme plus haut.

Par exemple, pour une demi-sphère de rayon R centrée en l'origine, on peut prendre

$$D = \left\{ (u, v) \in \mathbb{R}^2 \mid u^2 + v^2 < R \right\}$$

le disque ouvert centré en l'origine de rayon R et

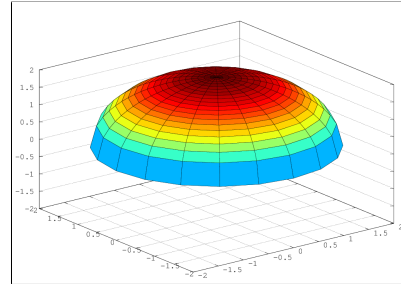
$$\sigma(u, v) = \sqrt{R^2 - u^2 - v^2}$$

Une demi sphère de rayon 2:

```

1 t=0:2*pi/20:2*pi;
2 r=0:0.1:2;
3 [tt, rr]=meshgrid(t, r);
4 xx=rr.*cos(tt);
5 yy=rr.*sin(tt);
6 zz=sqrt(abs(4-xx.^2-yy.^2));
7 surf(xx, yy, zz)
8 axis([-2 2 -2 2 -2 2], "equal")
9 print demisphere.png

```



Soit \vec{A} une fonction de \mathbb{R}^3 dans \mathbb{R}^3 continûment dérivable. Alors, on a l'égalité (formule de Stokes)

$$\int_S (\vec{\nabla} \times \vec{A}) \bullet d\vec{S} = \int_{\partial S} \vec{A} \bullet d\vec{l}$$

En effet, notons

$$\vec{\xi}(t) = \begin{pmatrix} \sigma_1(u_0 + t, v_0) \\ \sigma_2(u_0 + t, v_0) \\ \sigma_3(u_0 + t, v_0) \end{pmatrix} \text{ et } \vec{v}(t) = \begin{pmatrix} \sigma_1(u_0, v_0 + t) \\ \sigma_2(u_0, v_0 + t) \\ \sigma_3(u_0, v_0 + t) \end{pmatrix}$$

alors l'élément de surface est donné par

$$d\vec{S}(u_0, v_0) = \dot{\vec{\xi}} \times \dot{\vec{v}} = \begin{pmatrix} \frac{\partial \sigma_1}{\partial u}(u_0, v_0) \\ \frac{\partial \sigma_2}{\partial u}(u_0, v_0) \\ \frac{\partial \sigma_3}{\partial u}(u_0, v_0) \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \frac{\partial \sigma_1}{\partial v}(u_0, v_0) \\ \frac{\partial \sigma_2}{\partial v}(u_0, v_0) \\ \frac{\partial \sigma_3}{\partial v}(u_0, v_0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial \sigma_2}{\partial u} \frac{\partial \sigma_3}{\partial v} - \frac{\partial \sigma_3}{\partial u} \frac{\partial \sigma_2}{\partial v} \\ \frac{\partial \sigma_3}{\partial u} \frac{\partial \sigma_1}{\partial v} - \frac{\partial \sigma_1}{\partial u} \frac{\partial \sigma_3}{\partial v} \\ \frac{\partial \sigma_1}{\partial u} \frac{\partial \sigma_2}{\partial v} - \frac{\partial \sigma_2}{\partial u} \frac{\partial \sigma_1}{\partial v} \end{pmatrix}$$

et

$$\begin{aligned} \int_S (\vec{\nabla} \times \vec{A}) \bullet d\vec{S} &= \int_D \begin{pmatrix} \frac{\partial A_3(\vec{\sigma}(u, v))}{\partial y} - \frac{\partial A_2(\vec{\sigma}(u, v))}{\partial z} \\ \frac{\partial A_1(\vec{\sigma}(u, v))}{\partial z} - \frac{\partial A_3(\vec{\sigma}(u, v))}{\partial x} \\ \frac{\partial A_2(\vec{\sigma}(u, v))}{\partial x} - \frac{\partial A_1(\vec{\sigma}(u, v))}{\partial y} \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} dS_1(u, v) \\ dS_2(u, v) \\ dS_3(u, v) \end{pmatrix} du dv \\ &= \int_S \left(\frac{\partial A_3(\vec{\sigma}(u, v))}{\partial y} - \frac{\partial A_2(\vec{\sigma}(u, v))}{\partial z} \right) dS_1(u, v) du dv \\ &\quad + \int_S \left(\frac{\partial A_1(\vec{\sigma}(u, v))}{\partial z} - \frac{\partial A_3(\vec{\sigma}(u, v))}{\partial x} \right) dS_2(u, v) du dv \\ &\quad + \int_S \left(\frac{\partial A_2(\vec{\sigma}(u, v))}{\partial x} - \frac{\partial A_1(\vec{\sigma}(u, v))}{\partial y} \right) dS_3(u, v) du dv \\ &= R_1 + R_2 + R_3 \end{aligned}$$

où

$$R_1 = \int_S \left(\frac{\partial A_1(\vec{\sigma}(u, v))}{\partial z} dS_2(u, v) - \frac{\partial A_1(\vec{\sigma}(u, v))}{\partial y} dS_3(u, v) \right) du dv$$

$$R_2 = \int_S \left(\frac{\partial A_2(\vec{\sigma}(u, v))}{\partial x} dS_3(u, v) - \frac{\partial A_2(\vec{\sigma}(u, v))}{\partial z} dS_1(u, v) \right) du dv$$

$$R_3 = \int_S \left(\frac{\partial A_3(\vec{\sigma}(u, v))}{\partial y} dS_1(u, v) - \frac{\partial A_3(\vec{\sigma}(u, v))}{\partial x} dS_2(u, v) \right) du dv$$

Calculons, par exemple,

$$R_1 = \int_S \left(\frac{\partial A_1(\vec{\sigma}(u, v))}{\partial z} dS_2(u, v) - \frac{\partial A_1(\vec{\sigma}(u, v))}{\partial y} dS_3(u, v) \right) du dv$$

$$\int_S \left(\frac{\partial A_1}{\partial z} \left(\frac{\partial \sigma_3}{\partial u} \frac{\partial \sigma_1}{\partial v} - \frac{\partial \sigma_1}{\partial u} \frac{\partial \sigma_3}{\partial v} \right) - \frac{\partial A_1}{\partial y} \left(\frac{\partial \sigma_1}{\partial u} \frac{\partial \sigma_2}{\partial v} - \frac{\partial \sigma_2}{\partial u} \frac{\partial \sigma_1}{\partial v} \right) \right) du dv$$

Par ailleurs,

$$\int_{\partial S} \vec{A} \bullet d\vec{l} = \int_0^1 \vec{A}(\vec{\sigma}(\vec{\gamma}(t))) \bullet \frac{d}{dt} (\vec{\sigma} \circ \vec{\gamma})(t) dt = \int_0^1 A_1(\vec{\sigma}(\vec{\gamma}(t))) \left(\frac{\partial \sigma_1}{\partial u} \dot{\gamma}_1(t) + \frac{\partial \sigma_1}{\partial v} \dot{\gamma}_2(t) \right) dt$$

$$+ \int_0^1 A_2(\vec{\sigma}(\vec{\gamma}(t))) \left(\frac{\partial \sigma_1}{\partial u} \dot{\gamma}_2(t) + \frac{\partial \sigma_2}{\partial v} \dot{\gamma}_2(t) \right) dt + \int_0^1 A_3(\vec{\sigma}(\vec{\gamma}(t))) \left(\frac{\partial \sigma_1}{\partial u} \dot{\gamma}_3(t) + \frac{\partial \sigma_3}{\partial v} \dot{\gamma}_2(t) \right) dt$$

Calculons par exemple

$$\int_0^1 A_1(\vec{\sigma}(\vec{\gamma}(t))) \left(\frac{\partial \sigma_1}{\partial u} \dot{\gamma}_1(t) + \frac{\partial \sigma_1}{\partial v} \dot{\gamma}_2(t) \right) dt = \int_0^1 \begin{pmatrix} A_1(\vec{\sigma}(\vec{\gamma}(t))) \frac{\partial \sigma_1}{\partial u} \\ A_1(\vec{\sigma}(\vec{\gamma}(t))) \frac{\partial \sigma_1}{\partial v} \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} \dot{\gamma}_1(t) \\ \dot{\gamma}_2(t) \end{pmatrix} dt$$

$$= \int_{\partial D \circlearrowleft} \begin{pmatrix} A_1(\vec{\sigma}(\vec{\gamma}(t))) \frac{\partial \sigma_1}{\partial u} \\ A_1(\vec{\sigma}(\vec{\gamma}(t))) \frac{\partial \sigma_1}{\partial v} \end{pmatrix} \bullet d\vec{l} \stackrel{\text{Green}}{=} \int_D \left(\partial_u \left(A_1(\vec{\sigma}(u, v)) \frac{\partial \sigma_1}{\partial v} \right) - \partial_v \left(A_1(\vec{\sigma}(u, v)) \frac{\partial \sigma_1}{\partial u} \right) \right) du dv$$

$$= \int_D \left(\left(\frac{\partial A_1}{\partial x} \frac{\partial \sigma_1}{\partial u} + \frac{\partial A_1}{\partial y} \frac{\partial \sigma_2}{\partial u} + \frac{\partial A_1}{\partial z} \frac{\partial \sigma_3}{\partial u} \right) \frac{\partial \sigma_1}{\partial v} - \left(\frac{\partial A_1}{\partial x} \frac{\partial \sigma_1}{\partial v} + \frac{\partial A_1}{\partial y} \frac{\partial \sigma_2}{\partial v} + \frac{\partial A_1}{\partial z} \frac{\partial \sigma_3}{\partial v} \right) \frac{\partial \sigma_1}{\partial u} \right) dS$$

$$= \int_D \left(\frac{\partial A_1}{\partial z} \left(\frac{\partial \sigma_3}{\partial u} \frac{\partial \sigma_1}{\partial v} - \frac{\partial \sigma_3}{\partial v} \frac{\partial \sigma_1}{\partial u} \right) - \frac{\partial A_1}{\partial y} \left(\frac{\partial \sigma_2}{\partial v} \frac{\partial \sigma_1}{\partial u} - \frac{\partial \sigma_2}{\partial u} \frac{\partial \sigma_1}{\partial v} \right) \right) du dv = R_1$$

On démontre de la même manière les égalités pour R_2 et R_3 , ce qui achève la démonstration de la formule Stokes.

4.3. Formule d'Ostrogradsky.

Soit V un ouvert de \mathbb{R}^3 . Pour simplifier, nous supposons que V est z -simple, c'est-à-dire que V déterminé par un intervalle ouvert I_x de \mathbb{R} et 4 fonctions continûment dérivables (y_- et y_+ de

\mathbb{R} dans \mathbb{R} et Z_- et Z_+ de \mathbb{R}^2 dans \mathbb{R}) de la manière suivante:

$$V = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid x \in I_x, y_-(x) < y < y_+(x) \text{ et } Z_-(x, y) < z < Z_+(x, y) \right\}$$

Nous supposons également que V est x et y -simple, c'est-à-dire qu'il existe deux intervalles ouverts de \mathbb{R} I_y et I_z ainsi que des fonctions z_{\pm} et x_{\pm} de \mathbb{R} dans \mathbb{R} et des fonctions Y_{\pm} et X_{\pm} de \mathbb{R}^2 dans \mathbb{R} telles que

$$\begin{aligned} V &= \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid y \in I_y, z_-(y) < z < z_+(y) \text{ et } X_-(y, z) < x < X_+(y, z) \right\} \\ &= \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid z \in I_z, x_-(z) < x < x_+(z) \text{ et } Y_-(x, z) < y < Y_+(x, z) \right\} \end{aligned}$$

Par exemple, pour une boule de rayon R centrée en l'origine, $I_x =]-R, R[$, $y_{\pm} = \pm\sqrt{R^2 - x^2}$ et $Z_{\pm} = \pm\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}$.

En remplaçant les deux dernières inégalités par une égalité dans la définition de V , on obtient le bord de V noté ∂V . Par exemple, pour une boule, le bord est une sphère.

Soit \vec{A} une fonction de \mathbb{R}^3 dans \mathbb{R}^3 continûment dérivable. Alors, on a l'égalité (**formule d'Ostrogradsky**)

$$\int_V (\vec{\nabla} \cdot \vec{A}) \, dv = \int_{\partial V} \vec{A} \cdot d\vec{S}$$

En effet,

$$\begin{aligned} \int_V (\vec{\nabla} \cdot \vec{A}) \, dV &= \int_V \left(\frac{\partial A_1}{\partial x}(\vec{r}) + \frac{\partial A_2}{\partial y}(\vec{r}) + \frac{\partial A_3}{\partial z}(\vec{r}) \right) dV \\ &= \int_V \frac{\partial A_1}{\partial x}(\vec{r}) \, dV + \int_V \frac{\partial A_2}{\partial y}(\vec{r}) \, dV + \int_V \frac{\partial A_3}{\partial z}(\vec{r}) \, dV \end{aligned}$$

En vertu du théorème de Fubini, si f est une fonction continue de \mathbb{R}^3 dans \mathbb{R} , alors

$$\begin{aligned} \int_V f(\vec{r}) \, dV &= \int_{x \in I_x} \left(\int_{y_-(x)}^{y_+(x)} \left(\int_{Z_-(x,y)}^{Z_+(x,y)} f(\vec{r}) \, dz \right) dy \right) dx \\ &= \int_{y \in I_y} \left(\int_{z_-(y)}^{z_+(y)} \left(\int_{X_-(y,z)}^{X_+(y,z)} f(\vec{r}) \, dx \right) dz \right) dy \\ &= \int_{z \in I_z} \left(\int_{x_-(z)}^{x_+(z)} \left(\int_{Y_-(x,z)}^{Y_+(x,z)} f(\vec{r}) \, dy \right) dx \right) dz \end{aligned}$$

Or, en vertu du théorème fondamental du calcul différentiel,

$$\begin{aligned} \int_V \frac{\partial A_3}{\partial z}(\vec{r}) dV &= \int_{x \in I_x} \left(\int_{y_-(x)}^{y_+(x)} \left(\int_{Z_-(x,y)}^{Z_+(x,y)} \frac{\partial A_3}{\partial z}(\vec{r}) dz \right) dy \right) dx \\ &= \int_{x \in I_x} \left(\int_{y_-(x)}^{y_+(x)} (A_1(x, y, Z_+(x, y)) - A_1(x, y, Z_-(x, y))) dy \right) dx \end{aligned}$$

Notons $I_x =]a, b]$,

$$\begin{aligned} (\partial V)_{xy} &= \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in I_x \text{ et } y = y_{\pm}(x) \right\} \cup \\ &\left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x = a \text{ et } y_-(a) \leq y \leq y_+(a) \right\} \cup \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x = b \text{ et } y_-(b) \leq y \leq y_+(b) \right\} \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \partial S_+ &= \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mid x \in I_x, y_-(x) \leq y \leq y_+(x), z = Z_+(x, y) \right\} \\ \partial S_- &= \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mid x \in I_x, y_-(x) \leq y \leq y_+(x), z = Z_-(x, y) \right\} \\ \partial S_{||} &= \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mid (x, y) \in (\partial V)_{xy}, Z_-(x, y) \leq z \leq Z_+(x, y) \right\} \end{aligned}$$

Notons,

$$\vec{\xi}(t) = \begin{pmatrix} x_0 + t \\ y_0 \\ Z_+(x_0 + t, y_0) \end{pmatrix} \text{ et } \vec{v}(t) = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 + t \\ Z_+(x_0, y_0 + t) \end{pmatrix}$$

alors l'élément de surface sur ∂S_+ est donné par

$$d\vec{S}_+(x_0, y_0) = \dot{\vec{\xi}} \times \dot{\vec{v}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \frac{\partial Z_+}{\partial x} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \frac{\partial Z_+}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{\partial Z_+}{\partial x} \\ -\frac{\partial Z_+}{\partial y} \\ 1 \end{pmatrix}$$

et sur ∂S_- par

$$d\vec{S}_-(x_0, y_0) = \begin{pmatrix} -\frac{\partial Z_-}{\partial x} \\ -\frac{\partial Z_-}{\partial y} \\ -1 \end{pmatrix}$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} \int_{\partial S_+} A_3 d\vec{S}_3 &= \int_{x \in I_x} \left(\int_{y_-(x)}^{y_+(x)} (A_3(x, y, Z_+(x, y)) d\vec{S}_+(x, y)_3) dy \right) dx \\ &= \int_{x \in I_x} \left(\int_{y_-(x)}^{y_+(x)} (A_3(x, y, Z_+(x, y))) dy \right) dx \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \int_{\partial S_-} A_3 d\vec{S}_3 &= \int_{x \in I_x} \left(\int_{y_-(x)}^{y_+(x)} (A_3(x, y, Z_+(x, y)) d\vec{S}_-(x, y)_3 \right) dy \Big) dx \\ &= - \int_{x \in I_x} \left(\int_{y_-(x)}^{y_+(x)} (A_3(x, y, Z_+(x, y))) dy \right) dx \end{aligned}$$

Finalement, notons $\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2$ une paramétrisation de $(\partial V)_{xy}$ et

$$\vec{\xi}(t) = \begin{pmatrix} \gamma_1(t_0 + t) \\ \gamma_2(t_0 + t) \\ z_0 \end{pmatrix} \text{ et } \vec{v}(t) = \begin{pmatrix} \gamma_1(t_0) \\ \gamma_2(t_0) \\ z_0 + t \end{pmatrix}$$

alors l'élément de surface sur $\partial S_{||}$ est donné par

$$d\vec{S}_{||}(t_0, z_0) = \dot{\vec{\xi}} \times \dot{\vec{v}} = \begin{pmatrix} \dot{\gamma}_1(t_0) \\ \dot{\gamma}_2(t_0) \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dot{\gamma}_2(t_0) \\ -\dot{\gamma}_1(t_0) \\ 0 \end{pmatrix}$$

Ainsi,

$$\int_{\partial S_{||}} A_3 d\vec{S}_3 = \int_{t \in [0, 1]} \left(\int_{Z_-(\gamma(t))}^{Z_+(\gamma(t))} (A_3(x, y, Z_+(x, y)) d\vec{S}_{||}(t, z)_3 \right) dz \Big) dt = 0$$

Par conséquent,

$$\int_V \frac{\partial A_3}{\partial z}(\vec{r}) dV = \int_{\partial V} A_3 d\vec{S}_3$$

De manière similaire, on montre que

$$\int_V \frac{\partial A_1}{\partial x}(\vec{r}) dV = \int_{\partial V} A_1 d\vec{S}_1 \text{ et } \int_V \frac{\partial A_2}{\partial y}(\vec{r}) dV = \int_{\partial V} A_2 d\vec{S}_2$$

ce qui achève la démonstration de la formule d'Ostrogradsky.

REMARQUE 4.2. Pour un fluide incompressible (comme l'eau) au repos, l'équation de Newton s'écrit (équation d'Euler)

$$\frac{1}{\rho} \vec{\nabla} p - \vec{g} = 0 \Rightarrow \vec{\nabla} p = \rho \vec{g}$$

où ρ est la masse volumique du liquide, p la pression et \vec{g} est la pesanteur terrestre ($\vec{g} = (0, 0, -9.8 \text{ m/s}^2)$). Par conséquent, l'équation d'Euler donne

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial p}{\partial x} \\ \frac{\partial p}{\partial y} \\ \frac{\partial p}{\partial z} \end{pmatrix} = \rho \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -g \end{pmatrix}$$

Considérons un corps dans l'eau et notons V sa portion immergée et ∂V son bord immergé (la partie immergée de la coque d'un bateau par exemple). Notons $\vec{p} = (0, 0, p)$. En appliquant la

formule d'Ostrogradsky, on trouve que la poussée d'Archimède, qui est verticale et dirigée vers le haut, est donnée par

$$\vec{P} = - \int_{\partial V} p d\vec{S} \Rightarrow P = - \int_{\partial V} \vec{p} \bullet d\vec{S} = - \int_V (\vec{\nabla} \bullet \vec{p}) dV = - \int_V \rho(-g) dV = g\rho \int_V dV = g\rho V_{imm}$$

C'est le principe d'Archimède: tout corps plongé dans l'eau subit une force dirigée vers le haut égale au poids du volume d'eau déplacé. Archimède serait-il le père du théorème fondamental du calcul différentiel ?

4.4. Formule d'Ostrogradsky.

Considérons le cube

$$\Omega = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mid -\varepsilon \leq x \leq \varepsilon \text{ et } -\varepsilon \leq y \leq \varepsilon \text{ et } -\varepsilon \leq z \leq \varepsilon \right\}$$

Notons les faces du cubes par

$$\begin{aligned} \partial\Omega_{x\pm} &= \left\{ \begin{pmatrix} \pm\varepsilon \\ y \\ z \end{pmatrix} \mid -\varepsilon \leq y \leq \varepsilon \text{ et } -\varepsilon \leq z \leq \varepsilon \right\} \\ \partial\Omega_{y\pm} &= \left\{ \begin{pmatrix} x \\ \pm\varepsilon \\ z \end{pmatrix} \mid -\varepsilon \leq x \leq \varepsilon \text{ et } -\varepsilon \leq z \leq \varepsilon \right\} \\ \partial\Omega_{z\pm} &= \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ \pm\varepsilon \end{pmatrix} \mid -\varepsilon \leq x \leq \varepsilon \text{ et } -\varepsilon \leq y \leq \varepsilon \right\} \end{aligned}$$

et le bord du cube par

$$\partial\Omega = \partial\Omega_{x+} \cup \partial\Omega_{x-} \cup \partial\Omega_{y+} \cup \partial\Omega_{y-} \cup \partial\Omega_{z+} \cup \partial\Omega_{z-}$$

Pour tout point du bord du cube, définissons le **vecteur normal à la surface** par (voir figure 4)

$$\vec{r} \in \partial\Omega \Rightarrow \vec{n}(\vec{r}) = \begin{cases} \vec{e}_1 & \text{si } \vec{r} \in \partial\Omega_{x+} \\ -\vec{e}_1 & \text{si } \vec{r} \in \partial\Omega_{x-} \\ \vec{e}_2 & \text{si } \vec{r} \in \partial\Omega_{y+} \\ -\vec{e}_2 & \text{si } \vec{r} \in \partial\Omega_{y-} \\ \vec{e}_3 & \text{si } \vec{r} \in \partial\Omega_{z+} \\ -\vec{e}_3 & \text{si } \vec{r} \in \partial\Omega_{z-} \end{cases}$$

où $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ désigne la base canonique

$$\vec{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{e}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

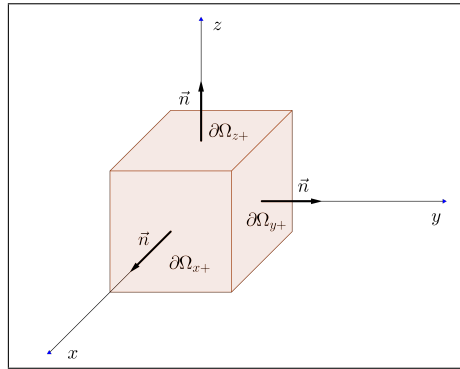


FIGURE 4.

Soit $\vec{A} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$. Alors,

$$\begin{aligned}
 \int_{\Omega} \operatorname{div}(\vec{A}) \, dV &= \int_{\Omega} (\partial_x A_1 + \partial_y A_2 + \partial_z A_3) \, dV = \int_{\Omega} \partial_x A_1 \, dV + \int_{\Omega} \partial_y A_2 \, dV + \int_{\Omega} \partial_z A_3 \, dV \\
 &= \int_{y=-\varepsilon}^{\varepsilon} \left(\int_{z=-\varepsilon}^{\varepsilon} \underbrace{\left(\int_{x=-\varepsilon}^{\varepsilon} \partial_x A_1 \, dx \right)}_{=A_1(\varepsilon, y, z) - A_1(-\varepsilon, y, z)} \, dz \right) dy \\
 &\quad + \int_{x=-\varepsilon}^{\varepsilon} \left(\int_{z=-\varepsilon}^{\varepsilon} \underbrace{\left(\int_{y=-\varepsilon}^{\varepsilon} \partial_y A_2 \, dy \right)}_{=A_2(x, \varepsilon, z) - A_2(x, -\varepsilon, z)} \, dz \right) dx \\
 &\quad + \int_{x=-\varepsilon}^{\varepsilon} \left(\int_{y=-\varepsilon}^{\varepsilon} \underbrace{\left(\int_{z=-\varepsilon}^{\varepsilon} \partial_z A_3 \, dz \right)}_{=A_3(x, y, \varepsilon) - A_3(x, y, -\varepsilon)} \, dy \right) dx
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \int_{y=-\varepsilon}^{\varepsilon} \left(\int_{z=-\varepsilon}^{\varepsilon} \vec{A}(\varepsilon, y, z) \cdot \vec{e}_1 dz \right) dy - \int_{y=-\varepsilon}^{\varepsilon} \left(\int_{z=-\varepsilon}^{\varepsilon} \vec{A}(-\varepsilon, y, z) \cdot \vec{e}_1 dz \right) dy \\
&= \int_{x=-\varepsilon}^{\varepsilon} \left(\int_{z=-\varepsilon}^{\varepsilon} \vec{A}(x, \varepsilon, z) \cdot \vec{e}_2 dz \right) dx - \int_{x=-\varepsilon}^{\varepsilon} \left(\int_{z=-\varepsilon}^{\varepsilon} \vec{A}(x, -\varepsilon, z) \cdot \vec{e}_2 dz \right) dx \\
&= \int_{x=-\varepsilon}^{\varepsilon} \left(\int_{y=-\varepsilon}^{\varepsilon} \vec{A}(x, y, \varepsilon) \cdot \vec{e}_3 dy \right) dx - \int_{x=-\varepsilon}^{\varepsilon} \left(\int_{y=-\varepsilon}^{\varepsilon} \vec{A}(x, y, -\varepsilon) \cdot \vec{e}_3 dy \right) dx \\
&= \int_{\partial\Omega} \vec{A} \cdot \underbrace{\vec{n} dS}_{=: d\vec{S}} = \int_{\partial\Omega} \vec{A} \cdot d\vec{S}
\end{aligned}$$

La généralisation de cette égalité à un sous-ensemble (quelconque mais suffisamment régulier) Ω de \mathbb{R}^3 est connue sous le nom de **formule d'Ostrogradsky**

$$\boxed{\int_{\Omega} \operatorname{div}(\vec{A}) dV = \int_{\partial\Omega} \vec{A} \cdot d\vec{S}}$$