

Notes du cours 4PYOS01-02
Electromagnétisme
2015-2016

B. Ischi

(MaTeX - <http://www.mathex.net>)

COLLÈGE DE CANDOLLE 5 RUE D'ITALIE

Table des matières

Chapitre 1. Electrostatique	3
1. Charge & corps chargés	3
2. La loi de de Coulomb	11
3. La notion de champ électrique	13
4. Tension et potentiel électrique	17
Chapitre 2. Fonctions à plusieurs variables	23
1. Dérivées partielles	23
2. Gradient	24
3. Intégrale curviligne	25
4. Généralisations du théorème fondamental du calcul différentiel	27
Chapitre 3. Forces conservatives	35
1. Définition	35
2. Travail	35
3. Exemples et contre-exemples	35
4. Energie mécanique	37
Chapitre 4. Equations de Maxwell	39
1. Champs électrique et magnétique	39
2. Champ électrique	39
3. Effet du champ électrique sur la matière	39
4. Champ magnétique	42
5. Densités de charge et de courant	42
6. Equations de Maxwell	44
7. Interprétation des équations de Maxwell: électrostatique	45
8. Equation de Maxwell M1	45
9. Interprétation des équations de Maxwell: électromagnétisme	54
10. Equation de Maxwell M2	54
11. Equation de Maxwell M4	54
12. Force de Laplace	56
13. Equation de Maxwell M3	57
14. Applications de l'induction	60
15. Equations d'onde	61
Chapitre 5. Circuits électriques	63
1. Symboles	63
2. Lois de Kirchhoff	63
3. Les Résistances	64
4. Les condensateurs	65

CHAPITRE 1

Electrostatique

1. Charge & corps chargés

1. Définition.

La charge est une propriété fondamentale de la matière, se manifestant par l'interaction entre deux corps chargés. De nombreuses expériences révélèrent l'existence de deux types de charges nommées *positives* et *négatives* pour des raisons historiques.

Deux corps portant des charges de même nature (positives ou négatives) subiront une force répulsive, alors que deux corps portant des charges de signe opposé subiront une force attractive.

Des expériences menées au 20^e siècle démontrèrent que la charge d'un corps est toujours un multiple entier de la charge élémentaire $e \simeq 1.610^{-19}$ *Coulomb*, il s'agit donc d'une grandeur *quantifiée*. La charge élémentaire correspond à la charge d'un électron (négative) ou d'un proton (positive) et cette grandeur est conservée dans un système isolé, il est donc impossible de détruire ou de créer de la charge.

L'unité de la charge est le *Coulomb* $[C]$ d'après Charles-Augustin de Coulomb (v. plus loin).

2. Electrification par frottement/contact.

La charge globale de la majorité de la matière est neutre, puisqu'un atome contient autant de charges négatives (électrons) que de charges positives (protons dans le noyau), s'il n'est pas ionisé.

Il est cependant possible de modifier la charge globale d'un corps en le frottant, comme nous l'avons tous constaté (à nos dépens) en recevant un léger choc électrique en présence d'un corps métallique après nous être chargés par frottement sur un sofa ou une moquette.

On peut par exemple frotter un bâton en plastique (neutre) avec de la fourrure (neutre) pour obtenir un bâton portant une charge globale non-nulle.

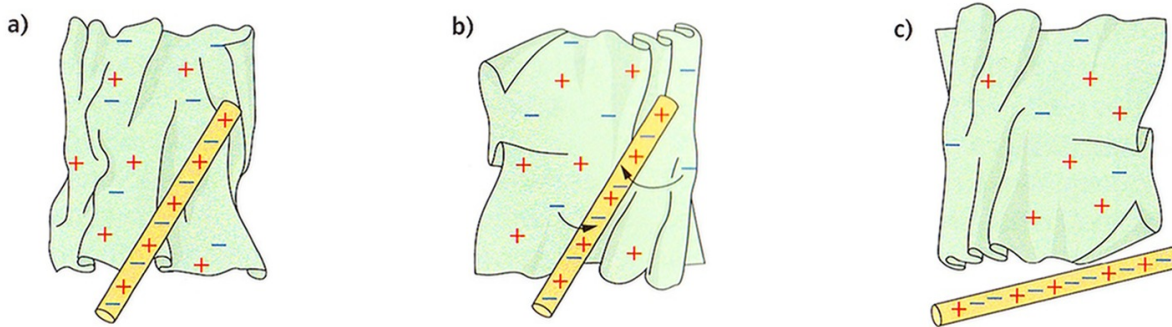


FIGURE 1. Transfert de charges par frottement

Comme on peut voir sur le croquis ci-dessus, le bâton arrache des électrons à la fourrure et porte finalement un excès d'électrons, alors que la fourrure accuse un manque d'électrons. La fourrure est chargée positivement et le bâton négativement. On peut aussi frotter une tige en verre avec un morceau de soie, dans ce cas la tige se chargera positivement et la soie négativement.

N.B. dans tous les cas, le transfert de charge est un transfert d'électrons, donc de charges négatives. Un corps se chargeant positivement a donc perdu des électrons et non acquis des charges positives. Ceci est dû au fait qu'il est pratiquement impossible d'arracher les protons situés dans le noyau, alors qu'il est relativement aisé d'arracher les électrons dans les couches extérieures d'un atome, où ils sont faiblement liés.

Les charges présentes en excès sur le bâton peuvent maintenant être en partie transférées par contact à un autre corps (p.ex. un électroscope) et le charger à son tour. Dans le cas d'un électroscope, l'appareil indique la présence de charges et son intensité par la répulsion entre le cadre de l'électroscope et l'aiguille pivotante.

De manière générale il faut donc un contact entre deux corps pour que la charge de l'un puisse être en partie transmise à l'autre.

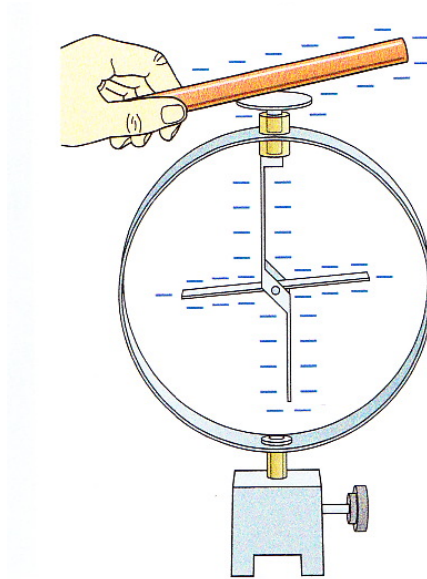


FIGURE 2. Electrification by contact of a body (electroscope)

N.B. C'est l'effet d'attraction exercé par de telles matières chargées par frottement sur d'autres petits corps légers qui fut constaté par certains savants grecs présocratiques : l'une des matières exhibant cet effet est l'ambre, en grec *elektra* (*Ηλεκτρον*) et c'est ce terme repris par p.ex. William Gilbert (1544-1603) dans son ouvrage *De Magnete* qui a donné le nom d'électricité.

3. Conducteurs & isolants.

Certaines substances laissent facilement traverser les charges, comme p.ex. les métaux ou les solutions liquides contenant des ions, il s'agit de **conducteurs** électriques.

D'autres substances laissent difficilement traverser les charges, on parle alors **d'isolants**. Le plastique, le bois, l'air (froid et sec) ou l'eau distillée sont p.ex. des isolants et c'est la raison pour laquelle la charge reste présente assez longtemps sur un bâton frotté, puisqu'elle ne peut pas se répartir dans le plastique ou se décharger dans l'air. Un électroscope en métal par contre peut facilement accueillir des charges présentes sur ce bâton, puisqu'il s'agit d'un conducteur. On peut aussi constater qu'il est facile de décharger l'électroscope à l'aide d'un doigt, le corps humain étant un assez bon conducteur.

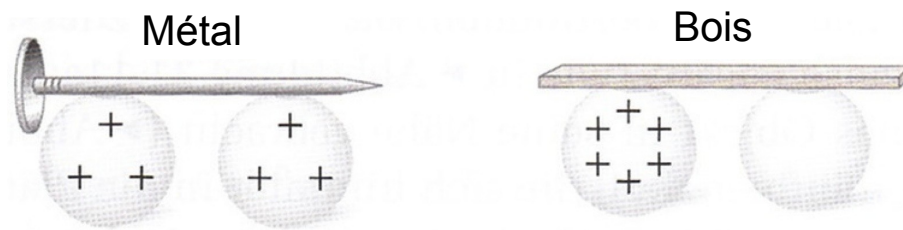


FIGURE 3. Conducteurs & isolants

Les tableaux suivants contiennent certaines valeurs de la conductivité (en *Siemens* S par mètre m) pour des substances isolantes ou conductrices.

Conducteurs	Conductivité $S \cdot m^{-1}$
Cuivre (Cu)	$5.96 \cdot 10^7$
Or (Au)	$4.1 \cdot 10^7$
Eau salée	4.8

Isolants	Conductivité $S \cdot m^{-1}$
Eau distillée	$5.5 \cdot 10^{-6}$
Air	$\sim 3 - 8 \cdot 10^{-15}$
Ebonite	$\sim 10^{-21}$

4. Influence.

Dans le cas de l'électroscope p.ex., on peut constater que l'aiguille commence à pivoter lorsqu'on en approche la charge avant le contact et donc avant le transfert de charges, mais que cet effet disparaît si on s'éloigne à nouveau de l'électroscope sans l'avoir touché.

Il n'y a donc pas eu de transfert de charges d'un corps à l'autre mais le corps chargé au préalable a exercé une influence sur l'autre corps grâce au champ électrique (v. plus loin) qui l'entoure. Cette influence se manifeste par une force s'exerçant sur les charges présentes dans le corps et par une nouvelle répartition de celles-ci dans le corps, on parle alors de **polarisation**.

5. Corps neutre.

Si le corps est globalement neutre, les charges identiques à celles présentes sur le corps chargé qu'on en approche vont s'éloigner (elles sont repoussées), alors que les charges de signe opposé vont s'approcher (elles sont attirées). On est donc en présence d'un corps où les charges ne sont plus réparties de manière homogène, en d'autres termes un corps polarisé.

N.B. Nous verrons plus tard que la force est inversement proportionnelle au carré de la distance ($F \propto \frac{1}{r^2}$), ce qui signifie dans le cas d'un corps neutre que l'attraction l'emportera toujours sur la répulsion et s'il est suffisamment léger, qu'il sera assez attiré pour se déplacer vers le corps chargé.

Dans l'exemple suivant, on approche un bâton chargé positivement d'un électroscope (neutre) contenant deux feuillets conducteurs. On peut voir que les feuillets auront tendance à s'écarter à cause de la répulsion augmentant avec les charges tentant de s'éloigner le plus possible du bâton qui finissent dans les feuillets.

On peut constater que cette expérience nous montre que de la charge est présente sur le bâton, en revanche elle ne nous permet pas de déterminer la nature de cette charge, l'effet étant identique si le bâton est chargé négativement.

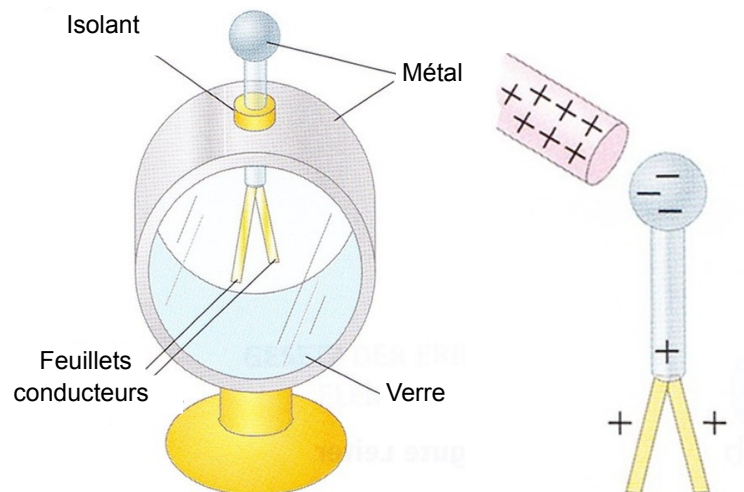


FIGURE 4. Electroscope à feuillets et influence sur un corps neutre

6. Corps chargé.

Un corps chargé au préalable ressentira aussi l'influence d'un autre corps chargé, on peut exploiter cet effet pour déterminer le signe des charges.

Dans l'exemple suivant, l'électroscope a été chargé (négativement) par contact : en l'approchant avec une charge négative, les feuillets s'écartent, alors que si l'on approche un corps chargé positivement, les feuillets se rapprochent.

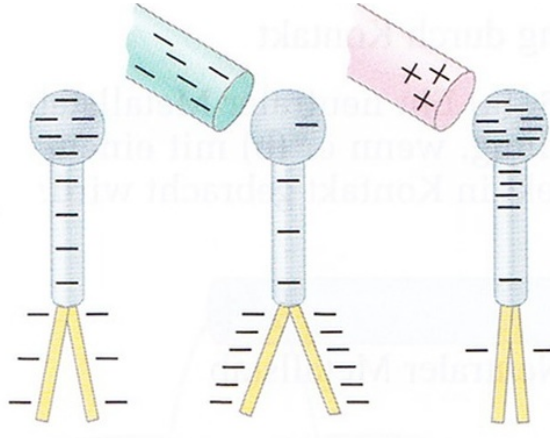
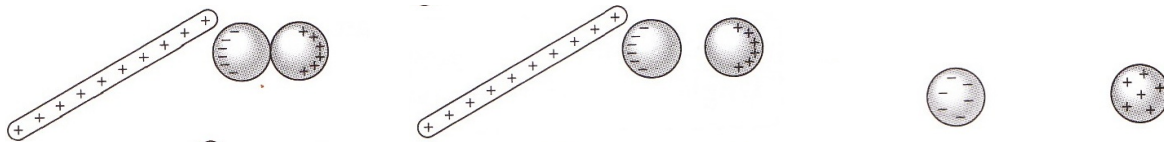


FIGURE 5. Influence

7. Polarisation par influence.

On peut exploiter l'effet de la polarisation pour faire apparaître des charges sur p.ex. un conducteur. Deux conducteurs en contact sont approchés d'une grosse charge les influençant : les charges peuvent se répartir à travers les deux corps puisqu'il s'agit de conducteurs. Si l'on sépare maintenant les deux charges toujours en présence de la grosse charge positive, on obtient deux corps portant désormais un excédent net de charges.



N.B. La charge totale étant conservée on verra apparaître autant de charges négatives sur un corps que de charges positives sur l'autre.

8. Répartition des charges dans un conducteur & cage de Faraday.

Les charges ajoutées à un conducteur pouvant se déplacer pratiquement librement, elles essaieront donc de s'éloigner le plus possible les unes des autres. Ceci implique entre autres qu'elles se répartiront toujours sur **l'extérieur** de la surface du conducteur. Si celui-ci est p.ex. sphérique, elles se répartiront de manière régulière sur l'extérieur de la sphère.

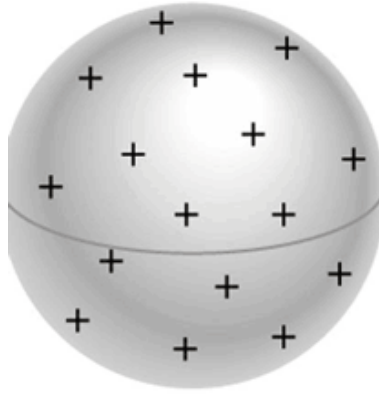


FIGURE 6. Charges réparties sur l'extérieur d'une sphère conductrice

Si le corps possède des endroits où le rayon de courbure est petit comparé au reste de celui-ci (en d'autres termes des pointes), les charges s'accumuleront dans ces pointes et le champ électrique engendré par ces charges sera plus important à cet endroit, le corps aura donc tendance à se décharger par ces pointes.

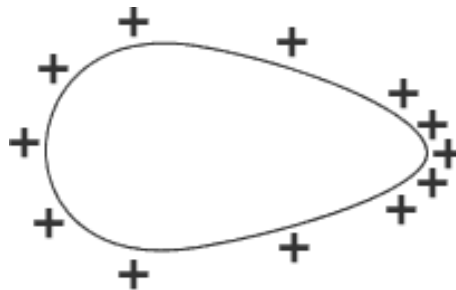


FIGURE 7. Répartition des charges dans un corps de courbure non uniforme.

9. Cage de Faraday.

On peut montrer que les charges réparties sur l'extérieur d'un conducteur de surface fermée se répartiront toujours de manière à neutraliser le champ électrique à l'intérieur du conducteur (que celui-ci soit creux ou plein). Ceci s'applique aussi dans le cas d'une surface délimitée par un treillis métallique (conducteur).

Cet effet fut découvert par Michael Faraday (v. plus loin) et on appelle donc un tel corps une cage de Faraday.

Un avion, un ascenseur, une voiture sont des cages de Faraday protégeant les utilisateurs de l'effet de la foudre par exemple.

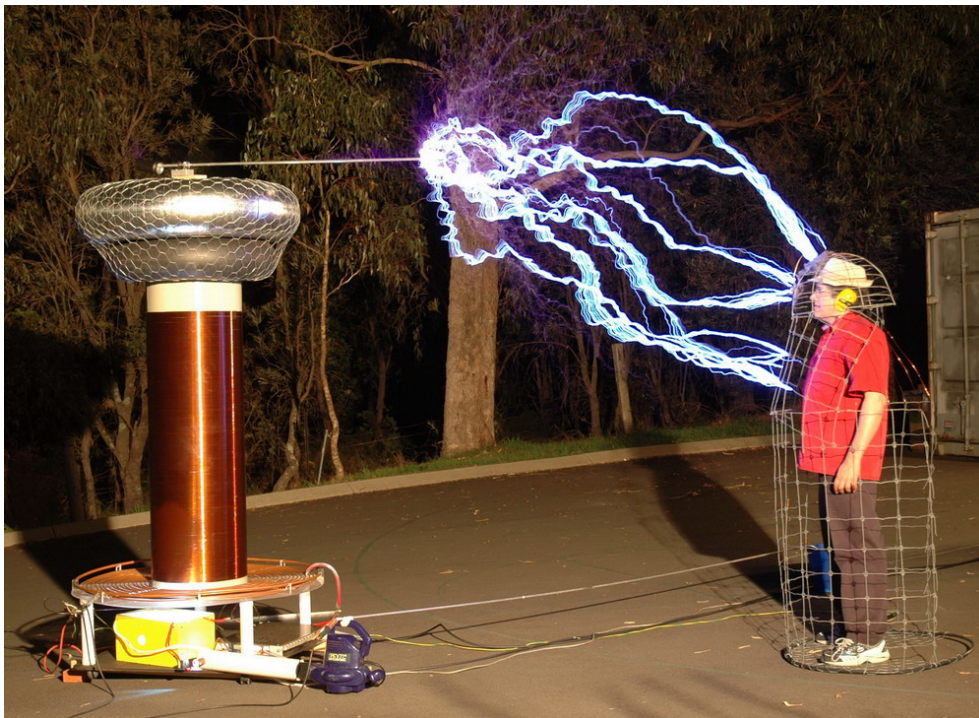


FIGURE 8. Personne protégée par une cage de Faraday

10. Benjamin Franklin 1706-1790.

Benjamin Franklin est l'un des pionniers de l'histoire américaine, à la fois scientifique de renommée internationale, en même temps politicien et diplomate habile, contribuant à la déclaration d'indépendance puis à la constitution de la nouvelle république des états unis d'Amérique.

Parmi ses contributions au monde scientifique, on doit à Franklin les noms de charge positive et négative pour décrire les deux différents types d'électricité susceptibles d'être engendrés par frottement. Avant cela, on utilisait souvent les termes d'électricité *vitreuse* (apparaissant sur une tige en verre) ou d'électricité *résineuse* pour décrire les charges provoquées par frottement sur chaque type de corps respectivement.

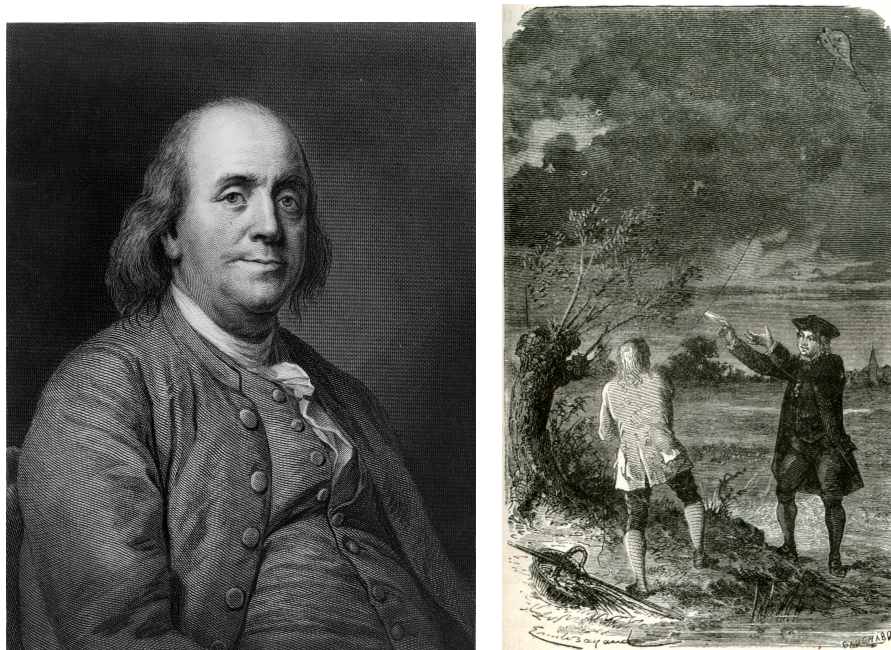


FIGURE 9. Benjamin Franklin et l'expérience du cerf-volant de Franklin

L'une des expériences les plus connues de Franklin fut de faire voler un cerf-volant par temps orageux et d'extraire une étincelle à un objet métallique relié à celui-ci (la ficelle mouillée du cerf-volant s'avérant un relativement bon conducteur). Cette expérience a permis de confirmer la nature électrique de la foudre.

Franklin développa par la suite le para-tonnerre (ou para-foudre) qui fut p.ex. installé par le roi Georges III sur les poudrières du royaume britannique.

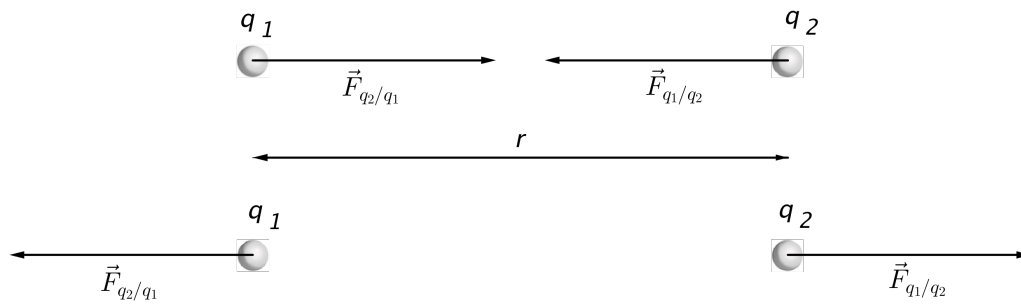
2. La loi de de Coulomb

1. Définition.

Les recherches menées par Charles Augustin de Coulomb (en 1784) permirent de déterminer la force agissant entre deux corps chargés et révélèrent que celle-ci était inversement proportionnelle au carré de la distance et directement proportionnelle au produit des charges.

La force de Coulomb ou force électrostatique décrit donc l'interaction entre deux charges ponctuelles en fonction du produit des charges et du carré de la distance r entre ces deux charges.

$$F_C = k \cdot \frac{q_1 \cdot q_2}{r^2} \quad \text{ou} \quad \vec{F}_C = k \cdot \frac{q_1 \cdot q_2}{r^2} \cdot \frac{\vec{r}}{r}$$



Comme on peut voir, la force ressentie par chaque charge est identique $F_{q_1/q_2} = F_{q_2/q_1}$

La constante k est donnée par la relation suivante

$$k = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \simeq 9 \cdot 10^9 \frac{Nm^2}{C^2}$$

Où la constante $\epsilon_0 \simeq 8.85 \cdot 10^{-12} A \cdot s \cdot V^{-1} \cdot m^{-1}$ est la **permittivité électrique** du vide (et environ celle de l'air).

- La force de Coulomb entre deux charges est **répulsive** pour deux charges de même signe
- La force de Coulomb entre deux charges est **attractive** pour deux charges de signe opposé

La force de Coulomb totale ressentie par une charge q_1 est le résultat de la somme vectorielle de toutes les forces exercées par les charges $q_2, q_3 \dots q_n$

$$\vec{F}_C = \vec{F}_2 + \vec{F}_3 + \dots + \vec{F}_n$$

2. Charles-Augustin de Coulomb 1736-1806.

Charles-Augustin de Coulomb était un scientifique français qui est probablement le plus connu pour son expérience déterminant que la force s'exerçant entre deux charges est inversement proportionnelle au carré de la distance : la force électrostatique ou force de Coulomb.

Il publia ses résultats en 1785 dans *Premier Mémoire sur l'Électricité et le Magnétisme*. Il résulte donc de ces trois essais, que l'action répulsive que les deux balles électrisées de la même nature d'électricité exercent l'une sur l'autre, suit la raison inverse du carré des distances.

Coulomb développa pour les besoins de son expérience une balance à torsion très précise, lui permettant de quantifier l'effet des charges entre elles. C'est aussi en se servant d'une balance à torsion de type similaire que Henry Cavendish (1731-1810) parvint à déterminer une dizaine d'années plus tard la valeur de la constante de gravitation universelle $G \simeq 6.67 \cdot 10^{-11} \text{ N} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{kg}^{-2}$

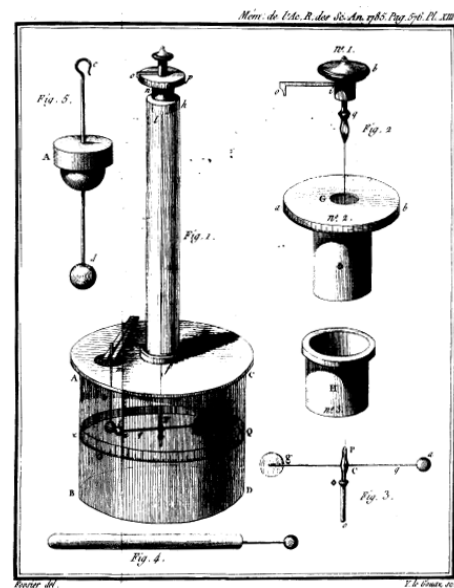
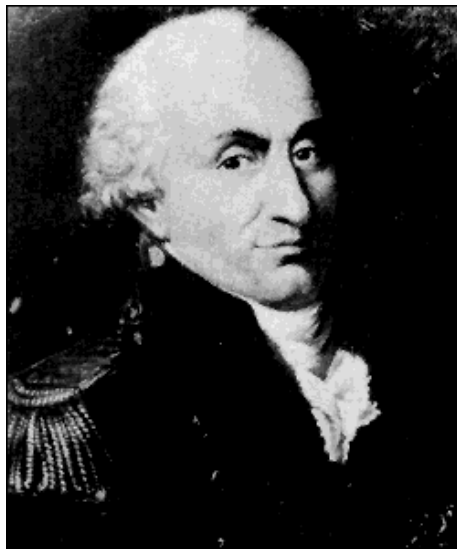


FIGURE 10. Charles-Augustin de Coulomb et sa balance à torsion

En son honneur, l'unité de la charge porte le nom de Coulomb (C).

3. La notion de champ électrique

1. Définition.

La notion de champ, qui représenta une révolution fondamentale dans la manière de modéliser les corps physiques et leurs interactions fut développée par Michael Faraday (1791-1867) et codifiée mathématiquement par (entre autres) James Clerk Maxwell (1831-1879).

En schématisant : la présence d'une charge Q a un effet sur l'espace environnant, la charge est entourée par un champ dont l'effet peut se manifester en présence d'une autre charge (q_{test}). En effet, si on introduit une charge test, (on veut dire par là que l'effet de cette charge sur le champ peut être considéré comme négligeable) dans le champ, celle-ci ressent une force F_C de la part de Q .

On peut donc associer à chaque point de l'espace autour de Q un vecteur, qui multiplié par la valeur de la charge test représente la force que celle-ci ressent, indiquant l'intensité et la direction de celle-ci. Il s'agit donc d'un champ vectoriel, le champ électrique

$$\vec{F} = q \cdot \vec{E} \Rightarrow \vec{E} = \frac{\vec{F}}{q}$$

On peut représenter le champ par des vecteurs ou par des lignes de champ. Dans ce cas, la densité des lignes de champ indique l'intensité du champ et les lignes de champ sont en tout point **tangentes** à la force ressentie

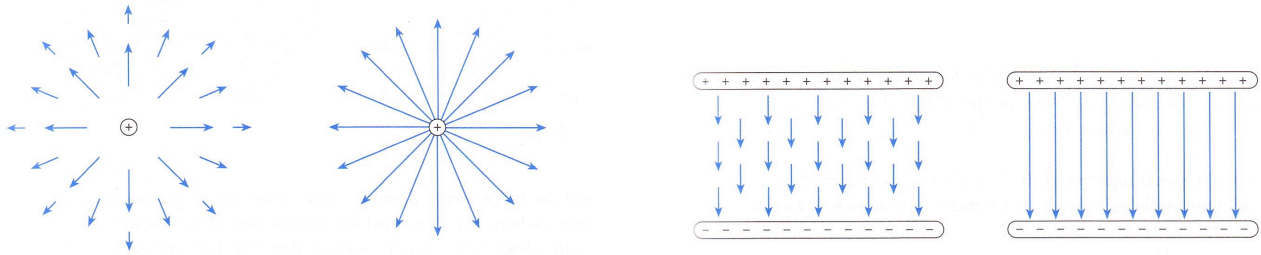


FIGURE 11. Champ vectoriel et lignes de champ pour une charge ponctuelle et entre deux plaques chargées

Le champ électrique total exercé par les charges $q_1, q_2 \dots q_n$ en un point est

$$\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 + \dots + \vec{E}_n$$

L'unité du champ est le $\left[\frac{N}{C}\right]$, on utilise aussi souvent l'unité équivalente $\left[\frac{V}{m}\right]$

N.B. Par convention la charge test est toujours considérée comme étant **positive**.

2. Exemples de champs particuliers.

2.1. *Champ d'une charge ponctuelle.* Pour une charge ponctuelle p.ex., on peut voir que le champ est donné par

$$\Rightarrow E = k \cdot \frac{Q}{r^2} \quad \text{ou} \quad \vec{E} = k \cdot \frac{Q}{r^2} \cdot \frac{\vec{r}}{r}$$

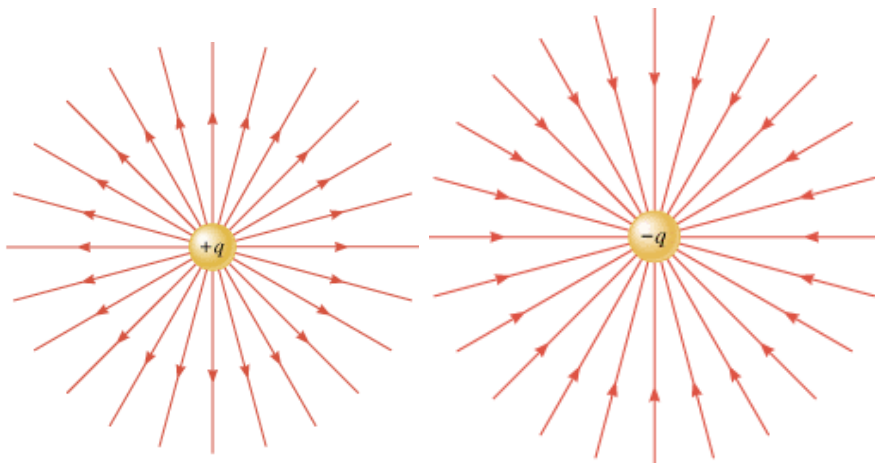


FIGURE 12. champ d'une charge ponctuelle positive et négative

On parle aussi dans ce cas du champ d'un monopôle, puisqu'il ne s'agit que d'une charge.

2.2. *Champ entre deux plaques parallèles.* Comme on peut voir sur ce graphique, le champ entre deux plaques est **uniforme**, la valeur du champ est la même partout entre les deux plaques (ceci n'est une bonne approximation qu'au centre entre les deux plaques)

$$E = \frac{1}{\varepsilon_0} \cdot \frac{Q}{S} \quad \text{champ entre deux plaques parallèles de charge } Q \text{ et de surface } S$$

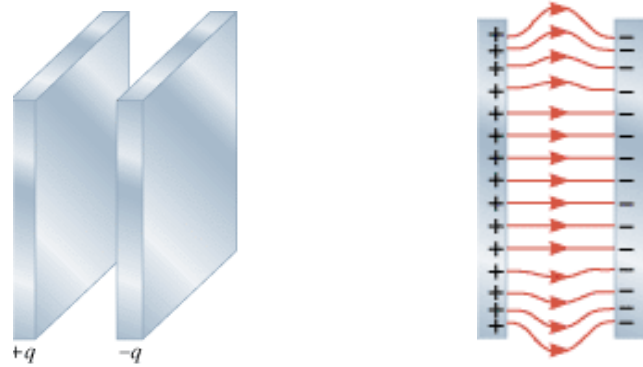


FIGURE 13. Champ entre deux plaques parallèles

2.3. *Champ d'un dipôle.* Deux charges de même signe ou opposées forment un système nommé dipôle. Pour des charges opposées le champ se renforce entre les deux charges, pour des charges de même signe le champ s'annule quelque part entre les deux charges.

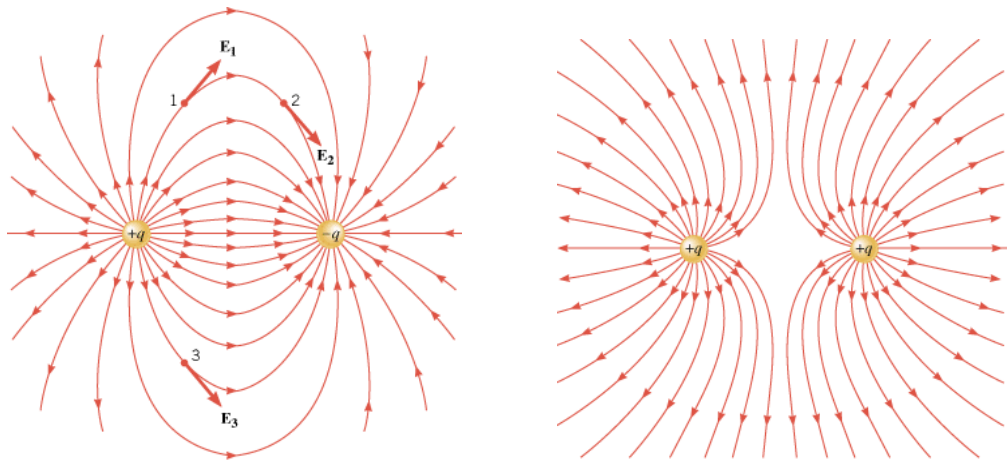


FIGURE 14. Champ d'un dipôle pour charges opposées ou de même signe

2.4. *Exemples supplémentaires.* Voici quelques exemples supplémentaires:

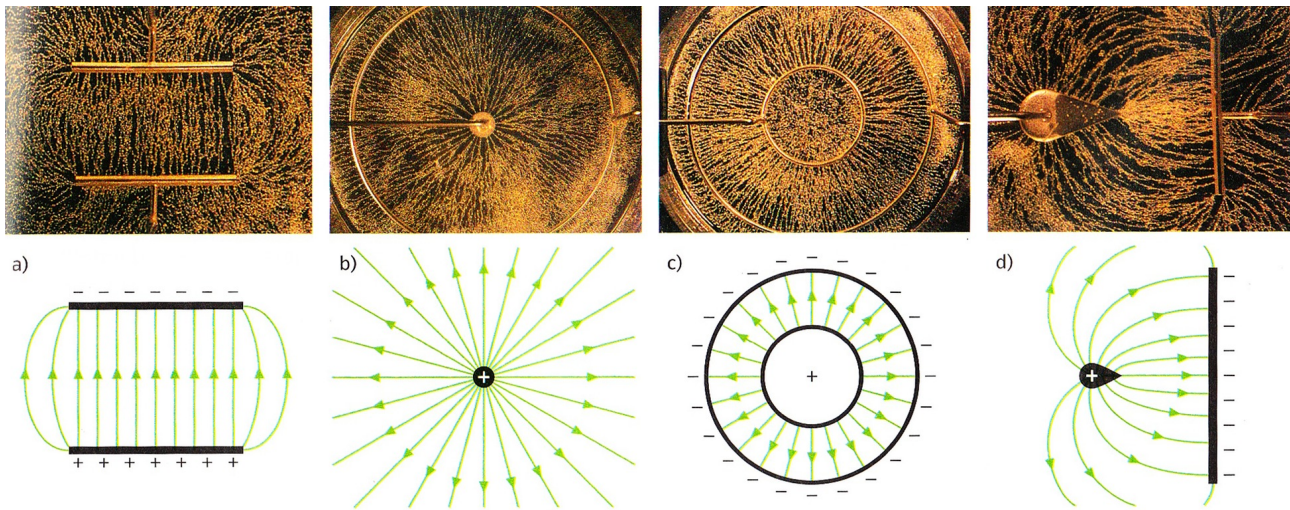


FIGURE 15. Quelques exemples de champs électriques

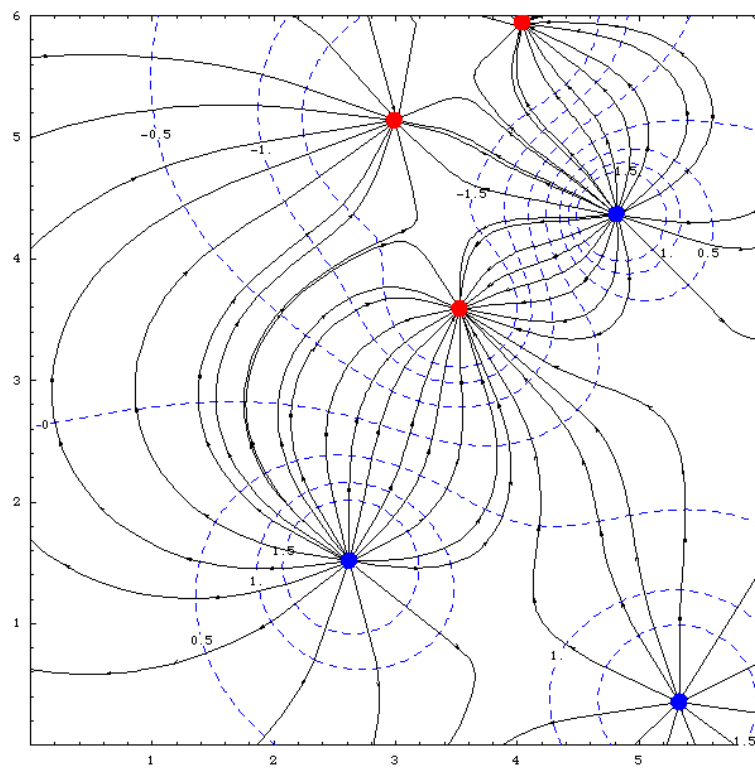


FIGURE 16. Exemple de champ entre 3 charges positives et 3 charges négatives

3. Michael Faraday 1791 - 1867.

Physicien anglais né en 1791, Michael Faraday entrera dans l'histoire comme un expérimentateur hors pair, contribuant énormément au développement de la théorie des champs et de l'électromagnétisme. Par ailleurs chimiste, il découvrira les lois de l'électrolyse et on lui doit l'adoption de termes comme cathode, anode, ion parmi d'autres.

De condition modeste, il ne reçoit qu'une éducation sommaire et commence à l'âge de 14 ans un apprentissage chez un relieur. Il mettra son temps libre à profit en dévorant les livres présents chez son employeur. Autodidacte, il parviendra à impressionner Humphrey Davy (1778-1829) président du *Royal Institution* à Londres qui l'engagera comme assistant de chimie en 1813. Il gravira ensuite les échelons pour être finalement nommé professeur de chimie, une position lui assurant un poste à vie au sein des institutions scientifiques de son époque.

En 1831, Michael Faraday mènera une série d'expériences dont la portée sera phénoménale: Faraday démontrera qu'il est possible d'induire un courant électrique dans un fil conducteur en faisant varier le champ magnétique agissant sur celui-ci, l'induction électromagnétique. Cette découverte est à l'origine de toute la production d'électricité que nous utilisons actuellement : quel que soit le type de centrales, toutes utilisent une forme d'énergie pour faire tourner des turbines contenant des aimants qui induiront un courant.

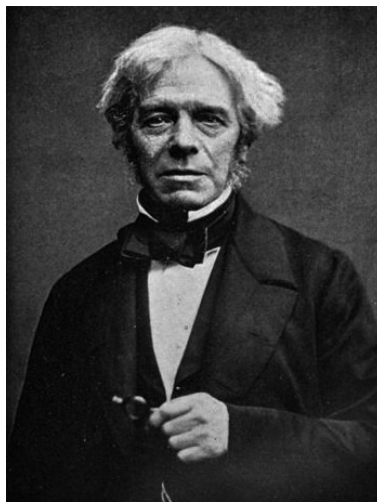


FIGURE 17. Michael Faraday 1791 - 1867

4. Tension et potentiel électrique

1. Tension.

Une charge se déplaçant, (au moins en partie), parallèlement aux lignes d'un champ électrique va ressentir une force agissant pendant son trajet, ce qui veut dire qu'il y aura un *travail* et donc un changement d'énergie.

Si par exemple la charge **s'éloigne** de l'autre charge engendrant le champ elle va :

- soit devoir travailler contre une force électrostatique qui l'attire, dans ce cas elle va acquérir de l'énergie potentielle électrique.
- soit travailler avec une force électrostatique qui la repousse, elle va dans ce cas perdre de l'énergie potentielle électrique et la transformer en énergie cinétique, thermique, de rayonnement ...

On peut démontrer que le travail de la force est proportionnel à la charge se déplaçant et qu'il est indépendant du chemin: $A_F \propto q \Rightarrow A_F = q \cdot U$. Il existe donc une grandeur constante U entre deux points déterminés de l'espace qui permet de calculer l'énergie perdue/reçue lors du déplacement:

$$U = \frac{A_F}{q}$$

Cette quantité nommée U est la tension en *Volt* $[V] = [\frac{J}{C}]$ d'après Alessandro Volta (v. plus loin).

Si une charge de 1 *C* p.ex. se déplace d'un point à un autre entre lesquels règne une tension de 100 *V*, elle peut soit gagner soit perdre 100 *J* d'énergie.

La force de Coulomb étant **conservative**, le changement de l'énergie potentielle ne dépend donc pas du chemin emprunté, mais uniquement des points de départ et d'arrivée.

2. Potentiel électrique.

2.1. *Définition.* S'il existe une tension de U *Volt* entre deux points A et B de l'espace, cette tension représente la différence des potentiels électriques de chaque point: $U = \Delta V = V_B - V_A$ où V est le potentiel électrique en un point.

Le potentiel en un seul point, p.ex. A , est défini par rapport à la terre qui, par définition, possède un potentiel de zéro $U_A = V_A - V_T$

On peut donc associer à chaque point de l'espace une valeur (non dirigée) représentant le potentiel électrique à cet endroit. Etant donné que la direction ne joue aucun rôle, il s'agit d'un champ scalaire et non pas d'un champ vectoriel.

2.2. *Potentiel d'une charge ponctuelle.* Le changement de l'énergie potentielle d'une charge q se déplaçant d'un point P_1 à un point P_2 dans le voisinage d'une charge ponctuelle Q est donné par :

$$\Delta \mathcal{E}_{pot\ el} = q \cdot U = q(V_{P_2} - V_{P_1}) = k \cdot q \cdot Q \cdot \left(\frac{1}{r_{P_2}} - \frac{1}{r_{P_1}} \right)$$

Il en suit que le potentiel à une distance r de la charge Q est

$$V(r) = k \cdot \frac{Q}{r}$$

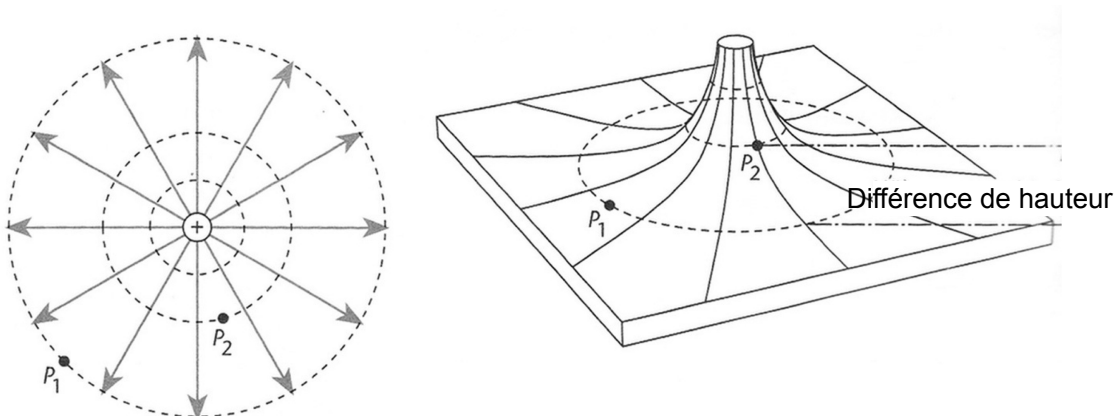


FIGURE 18. Analogie gravitationnelle pour le changement d'énergie potentielle

REMARQUE 4.1. Par définition,

$$\varepsilon_{pot\ ele} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{Qq}{\|\vec{r}\|} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{Qq}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$$

Par conséquent,

$$\vec{F}_{ele} = -\text{grad}(\varepsilon_{pot\ el}) = -\vec{\nabla} \left(\frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{Qq}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \right) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{Qq}{\|\vec{r}\|^3} \vec{r}$$

qui est bien répulsive si les charges ont le même signe et attractive dans le cas contraire.

Rappelons que l'énergie potentielle de gravitation est donnée par

$$\varepsilon_{pot\ grav} = -G \frac{Mm}{\|\vec{r}\|} = -G \frac{Mm}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$$

Par conséquent,

$$\vec{F}_{grav} = -\text{grad}(\varepsilon_{pot\ grav}) = \vec{\nabla} \left(G \frac{Qq}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \right) = -G \frac{Qq}{\|\vec{r}\|^3} \vec{r}$$

qui est toujours attractive.

2.3. Plaques parallèles. Soit deux plaques parallèles conductrices séparées par du vide (ou de l'air), que l'on charge de signes opposés. Le champ qui s'établit entre les deux plaques est uniforme, c'est à dire qu'il est le même partout dans l'espace entre les plaques.

Pour déplacer une charge, (p.ex.) positive, contre le champ électrique d'une plaque à l'autre, il faut exercer une force constante F sur la distance d séparant les deux plaques. Le champ est toujours parallèle au déplacement.

$$\Delta\mathcal{E}_{pot\ el} = -A_{F_{el}} = -qE \cdot d \cdot \cos(180^\circ) = q \cdot E \cdot d = q \cdot U \Rightarrow U = E \cdot d$$

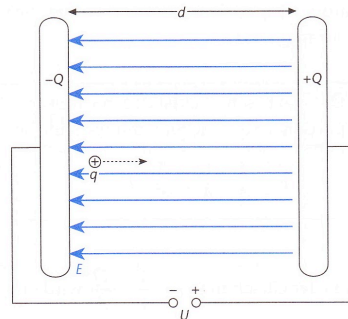


FIGURE 19. Champ entre deux plaques parallèles

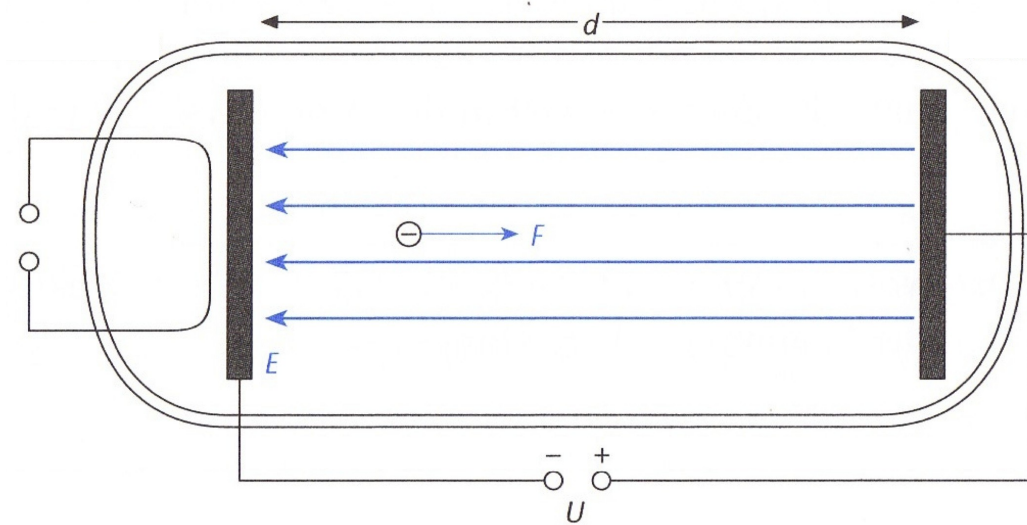


FIGURE 20. Particule chargée accélérée entre deux plaques parallèles

3. Accélération d'une charge.

Une particule chargée pénétrant dans le champ entre deux plaques peut être accélérée de manière uniforme, dans ce cas l'énergie potentielle perdue représente le gain d'énergie cinétique

$$\begin{aligned}\Delta \mathcal{E}_{cin} &= -\Delta \mathcal{E}_{pot} \\ \frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2 - \frac{1}{2} \cdot m \cdot v_0^2 &= |q \cdot U| \\ v &= \sqrt{\frac{2 \cdot |q \cdot U|}{m} + v_0^2}\end{aligned}$$

Remarquons que ce résultat est vrai même si le champ n'est pas uniforme. Ce résultat ne dépend pas de la distance d qui sépare le pôle $+$ du pôle $-$.

4. Alessandro Volta 1745-1827.

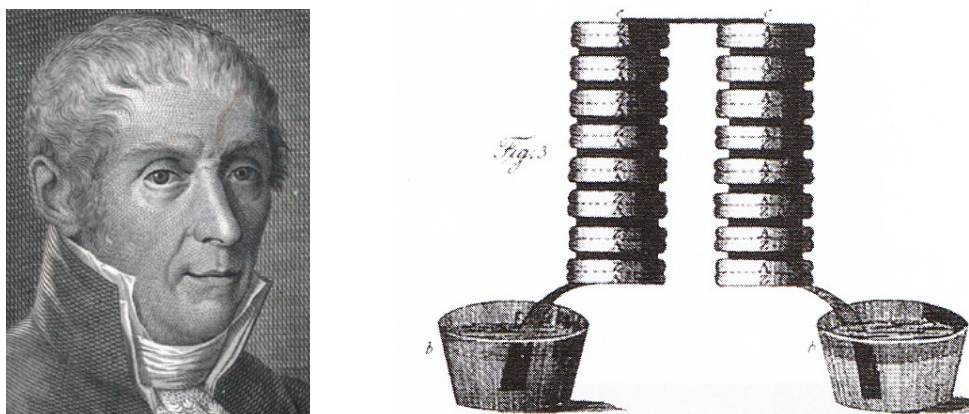


FIGURE 21. Alessandro Volta et sa pile voltaïque



FIGURE 22. Article de Volta décrivant son invention

CHAPITRE 2

Fonctions à plusieurs variables

Les notes de cours qui suivent ne contiennent ni théorèmes ni démonstrations. Elles constituent une introduction non formelle à l'analyse des fonctions à plusieurs variables destinée aux élèves du collège de Genève en OS Physique-Application des mathématiques.

1. Dérivées partielles

Considérons, à titre d'exemple, la fonction $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$f(x, y) = (x^2 + y^2 - 1)^2 + 1$$

Son graphe est une surface de \mathbb{R}^3 . On peut visualiser son graphe avec *Octave*. L'exécution du script

```
1 x = -1.1:0.1:1.1;
2 y = -1.1:0.1:1.1;
3 [xx,yy]=meshgrid(x,y);
4 zz=(xx.^2+yy.^2-1).^2+1;
5 surf(xx,yy,zz)
6 axis([-1.1 1.1 -1.1 1.1 0 4])
7 xlabel('x')
8 ylabel('y')
9 zlabel('z')
10 view(66,26)
11 print exemple.png
```

donne la graphe de la figure 1.

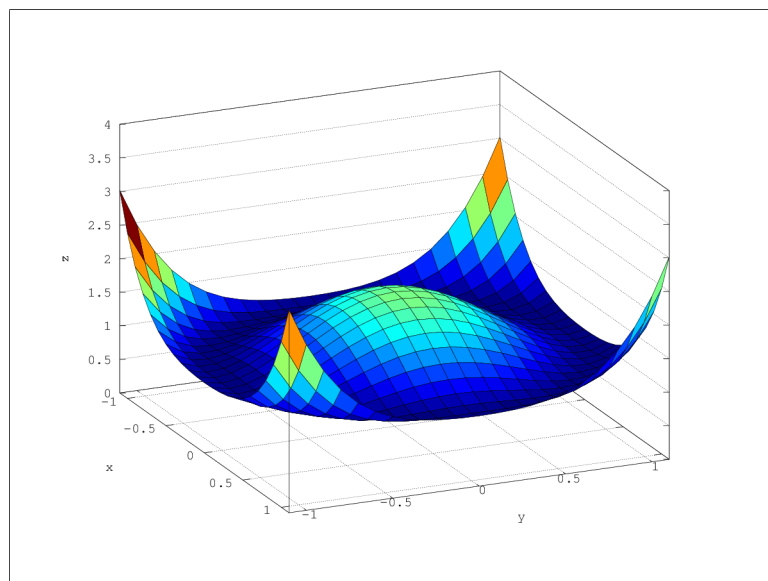


FIGURE 1. Le graphe de la fonction $f(x, y) = (x^2 + y^2 - 1)^2 + 1$.

On définit la **dérivée partielle** de f par rapport à la variable x , que l'on note

$$\frac{\partial f}{\partial x} \text{ ou } \partial_x f$$

comme la dérivée de f obtenue en considérant y comme une constante numérique:

$$(\partial_x f)(x, y) = 2(x^2 + y^2 - 1)2x$$

De même, la dérivée partielle de f par rapport à la variable y est obtenue en dérivant f par rapport à y en considérant x comme une constante numérique:

$$(\partial_y f)(x, y) = 2(x^2 + y^2 - 1)2y$$

2. Gradient

On définit le **gradient** de f , que l'on note

$$\text{grad}(f) \text{ ou } \vec{\nabla} f$$

comme la fonction de \mathbb{R}^2 dans \mathbb{R}^2 donnée par

$$(\vec{\nabla} f)(x, y) = \begin{pmatrix} (\partial_x f)(x, y) \\ (\partial_y f)(x, y) \end{pmatrix}$$

Pour notre exemple, nous obtenons

$$(\vec{\nabla} f)(x, y) = \begin{pmatrix} 2(x^2 + y^2 - 1)2x \\ 2(x^2 + y^2 - 1)2y \end{pmatrix} = 4(x^2 + y^2 - 1) \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Une **courbe de niveau** est une fonction dérivable $\vec{c} : I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ telle que $f(\vec{c}(t))$ est constante sur I , c'est-à-dire

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{d}{dt} f(\vec{c}(t)) = \frac{d}{dt} f(c_1(t), c_2(t)) = (\partial_x f)(\vec{c}(t)) \dot{c}_1(t) + (\partial_y f)(\vec{c}(t)) \dot{c}_2(t) \\ &= \begin{pmatrix} (\partial_x f)(\vec{c}(t)) \\ (\partial_y f)(\vec{c}(t)) \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} \dot{c}_1(t) \\ \dot{c}_2(t) \end{pmatrix} = (\vec{\nabla} f)(\vec{c}(t)) \bullet \dot{\vec{c}}(t) \end{aligned}$$

ce qui montre que $\vec{\nabla} f$ est un vecteur perpendiculaire aux courbes de niveau.

Pour représenter graphiquement une fonction \vec{g} de \mathbb{R}^2 dans \mathbb{R}^2 , on peut afficher en quelques points $(x; y)$ choisis du plan une flèche dont les coordonnées sont les coordonnées de $\vec{g}(x, y)$ et dont l'origine est placée au point $(x; y)$.

Par exemple, le script *Octave*

```

1  x = -1.3:0.2:1.3;
2  y = -1.3:0.2:1.3;
3  [xx, yy] = meshgrid(x, y);
4  vx = 4*(xx.^2 + yy.^2 - 1).*xx;
5  vy = 4*(xx.^2 + yy.^2 - 1).*yy;
6  quiver(xx, yy, vx, vy, 5)
7  axis([-1.5 1.5 -1.5 1.5])
8  xlabel('x')
9  ylabel('y')
10 print exemplegrad.png

```

donne le graphique de la figure 2

Dans notre exemple, les courbes de niveau sont des cercles. Le gradient est donc bien en tout point perpendiculaire à une courbe de niveau.

Le gradient $(\vec{\nabla})(f)(x, y)$ est nul si $f(x, y)$ est un minimum ou un maximum local. De plus, il “indique la direction de la plus forte pente”.

Dans notre exemple, f admet un maximum local en $(0; 0)$ et des minimas locaux sur le cercle de rayon 1 centré à l’origine. Or

$$(\vec{\nabla}f)(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = 0 = y \text{ ou } x^2 + y^2 = 1$$

Un exemple bien connu de fonction de \mathbb{R}^2 dans \mathbb{R} est une carte de géographie qui donne l’altitude de chaque point $(x; y)$.

3. Intégrale curviligne

Soit $\vec{c}: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^3$ continûment dérivable et $\vec{F}: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ continue. Alors, pour N un “grand” nombre entier

$$A_{\vec{F}} \approx \sum_{i=0}^{N-1} (\vec{c}(a + (i+1)\delta) - \vec{c}(a + i\delta)) \bullet \vec{F}(\vec{c}(a + i\delta)) \text{ où } \delta = \frac{b-a}{N}$$

donne le travail $A_{\vec{F}}$ de la force \vec{F} pour un déplacement du point $A = \vec{c}(a)$ au point $B = \vec{c}(b)$ le long de la courbe \vec{c} (voir figure 3). Or

$$\sum_{i=0}^{N-1} (\vec{c}(a + (i+1)\delta) - \vec{c}(a + i\delta)) \bullet \vec{F}(\vec{c}(a + i\delta)) = \sum_{i=0}^{N-1} \frac{\vec{c}(a + (i+1)\delta) - \vec{c}(a + i\delta)}{\delta} \bullet \vec{F}(\vec{c}(a + i\delta)) \delta$$

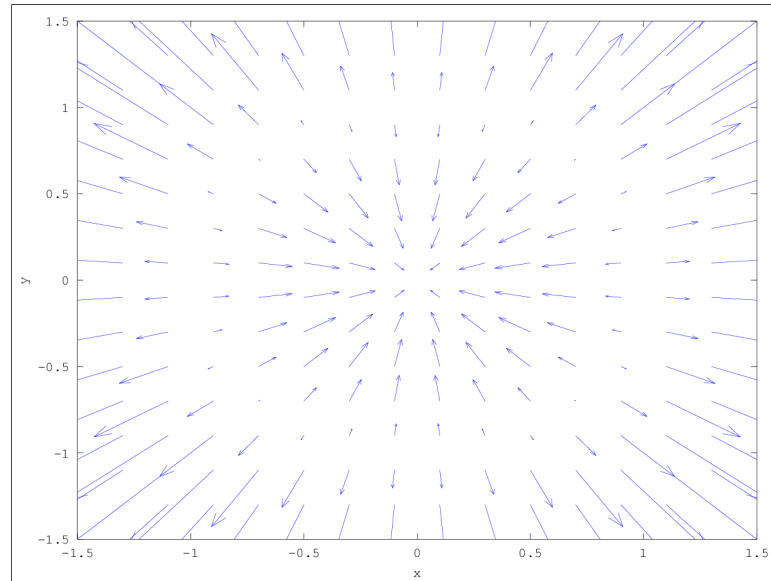
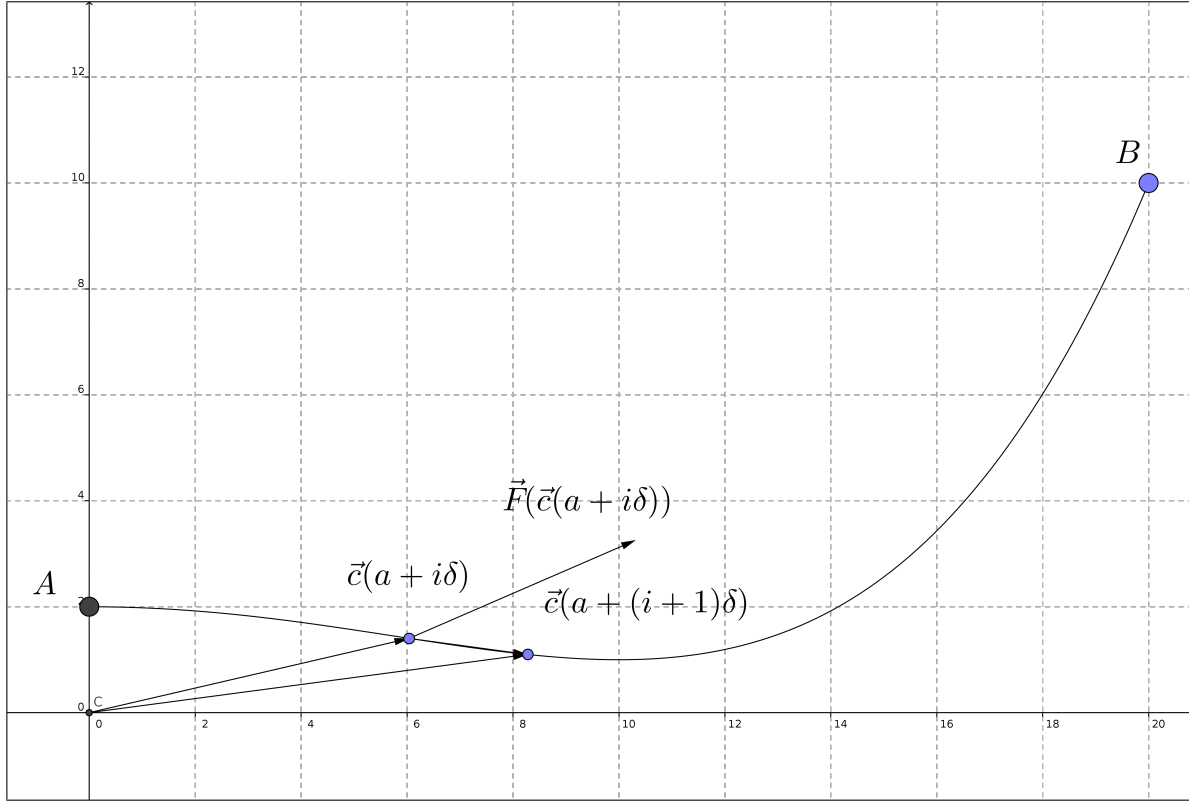


FIGURE 2. Le gradient de la fonction $f(x, y) = (x^2 + y^2 - 1)^2 + 1$.

FIGURE 3. Le travail d'une force \vec{F} .

qui est, si N est “suffisamment” grand (et donc δ “suffisamment petit”), une bonne approximation de l'aire délimitée par le graphe de la fonction de \mathbb{R} dans \mathbb{R} définie par

$$\dot{\vec{c}}(t) \bullet \vec{F}(\vec{c}(t))$$

l'axe des abscisses et les droites verticales $t = a$ et $t = b$ (en comptant négativement l'aire des surfaces en-dessous de l'axe des abscisses). En d'autres termes, le travail est donné par l'intégrale

$$A_{\vec{F}} = \int_a^b \dot{\vec{c}}(t) \bullet \vec{F}(\vec{c}(t)) dt$$

La formule donnée ci-dessus dépend uniquement de la courbe reliant $\vec{c}(a)$ à $\vec{c}(b)$ (c'est-à-dire de $\mathcal{C} = \vec{c}([a, b])$). Elle ne dépend pas de la paramétrisation de \mathcal{C} . En effet, soit $s : [t_0, t_1] \rightarrow [a, b]$ continûment dérivable. Alors, $\vec{h}(t) = \vec{c}(s(t))$ est une autre paramétrisation de \mathcal{C} . En d'autres termes, $\vec{h}([t_0, t_1]) = \mathcal{C}$. De plus,

$$\dot{\vec{h}}(t) = \dot{\vec{c}}(s(t)) \cdot \dot{s}(t)$$

Alors, par la formule d'intégration par changement de variable, il vient

$$\int_{t_0}^{t_1} \dot{\vec{h}}(t) \bullet \vec{F}(\vec{h}(t)) dt = \int_{t_0}^{t_1} \dot{\vec{c}}(s(t)) \cdot \dot{s}(t) \bullet \vec{F}(\vec{c}(s(t))) dt = \int_a^b \dot{\vec{c}}(s) \bullet \vec{F}(\vec{c}(s)) ds$$

Soit $\mathcal{C}_{A \rightarrow B}$ une courbe de l'espace reliant A à B . Il suit de ce qui précède, que nous pouvons définir

$$\int_{\mathcal{C}_{A \rightarrow B}} \vec{F} \bullet d\vec{l} = \int_a^b \vec{F}(\vec{c}(t)) \bullet \dot{\vec{c}}(t) dt$$

pour une paramétrisation quelconque $\vec{c}: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^3$ de $\mathcal{C}_{A \rightarrow B}$.

Si la force \vec{F} est **conservative**, c'est-à-dire s'il existe une fonction $U: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ continûment dérivable telle que

$$\vec{F}(\vec{x}) = -(\vec{\nabla} U)(\vec{x})$$

(dans ce cas la fonction U est appelée le **potentiel**) alors

$$\begin{aligned} A_{\vec{F}} &= \int_a^b \dot{\vec{c}}(t) \bullet \vec{F}(\vec{c}(t)) dt = - \int_a^b \dot{\vec{c}}(t) \bullet (\vec{\nabla} U)(\vec{c}(t)) dt \\ &= - \int_a^b \frac{d}{dt} U(\vec{c}(t)) dt = - (U(\vec{c}(b)) - U(\vec{c}(a))) = U(A) - U(B) \end{aligned}$$

ce qui montre que le travail de la force \vec{F} ne dépend pas du chemin reliant $A = \vec{c}(a)$ à $B = \vec{c}(b)$

4. Généralisations du théorème fondamental du calcul différentiel

DÉFINITION 4.1. On définit

$$\vec{\nabla} = \begin{pmatrix} \partial_x \\ \partial_y \\ \partial_z \end{pmatrix}$$

Soit $\vec{A}: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$. On définit

(1) la **divergence** de \vec{A} par

$$\text{div}(\vec{A}) = \vec{\nabla} \bullet \vec{A} = \partial_x A + \partial_y A + \partial_z A$$

(2) le **rotationnel** de \vec{A} par

$$\text{rot}(\vec{A}) = \vec{\nabla} \times \vec{A} = \begin{pmatrix} \partial_y A_3 - \partial_z A_2 \\ \partial_z A_1 - \partial_x A_3 \\ \partial_x A_2 - \partial_y A_1 \end{pmatrix}$$

1. Formule de Green.

Nous commençons par la **formule de Green**. Soit D un ouvert de \mathbb{R}^2 x et y simple, c'est-à-dire défini par deux intervalles ouverts I_x et I_y et 4 fonctions continûment dérivables x_{\pm} et y_{\pm} de \mathbb{R} dans \mathbb{R} telles que

$$D = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in I_x, y_-(x) < y < y_+(x) \right\} = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \in I_y, x_-(y) < x < x_+(y) \right\}$$

On définit le bord ∂D de D en remplaçant les inégalités par des égalités. Soit \vec{A} une fonction continûment dérivable de \mathbb{R}^2 dans \mathbb{R}^2 . Alors (formule de green),

$$\int_D \left(\frac{\partial A_2}{\partial x} - \frac{\partial A_1}{\partial y} \right) dS = \int_{\partial D \circlearrowleft} \vec{A} \bullet d\vec{l}$$

En effet, en vertu du théorème de Fubini et du théorème fondamental du calcul différentiel,

$$\begin{aligned} & \int_D \left(\frac{\partial A_2}{\partial x} - \frac{\partial A_1}{\partial y} \right) dS \\ &= \int_{y \in I_y} \left(\int_{x(y)}^{x_+(y)} \frac{\partial A_2}{\partial x} dx \right) dy - \int_{x \in I_x} \left(\int_{y(x)}^{y_+(x)} \frac{\partial A_1}{\partial y} dy \right) dx \\ &= \int_{y \in I_y} (A_2(x_+(y), y) - A_2(x_-(y), y)) dy - \int_{x \in I_x} (A_1(x, y_+(x)) - A_1(x, y_-(x))) dx \end{aligned}$$

Par définition,

$$\int_{\partial D \circlearrowleft} \vec{A} \bullet d\vec{l} = \int_{\partial D \circlearrowleft} A_1 d\vec{l}_1 + \int_{\partial D \circlearrowleft} A_2 d\vec{l}_2$$

Notons $I_x =]g, d[$ et

$$\vec{v}_{\pm}(t) = \begin{pmatrix} t \\ y_{\pm}(t) \end{pmatrix} \Rightarrow \dot{\vec{v}}_{\pm}(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ \dot{y}_{\pm}(t) \end{pmatrix}, \quad \vec{h}_{g \setminus d}(t) = \begin{pmatrix} g \setminus d \\ t \end{pmatrix} \Rightarrow \dot{\vec{h}}_{g \setminus d}(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Avec ces notations,

$$\begin{aligned} \int_{\partial D \circlearrowleft} A_1 d\vec{l}_1 &= \int_g^d A_1(x, y_-(x)) \dot{\vec{v}}_-(x)_1 dx + \int_{y(d)}^{y_+(d)} A_1(d, y) \dot{\vec{h}}_d(y)_1 dy \\ &\quad + \int_d^g A_1(x, y_+(x)) \dot{\vec{v}}_+(x)_1 dx + \int_{y_+(g)}^{y_-(g)} A_1(g, y) \dot{\vec{h}}_g(y)_1 dy \\ &= \int_g^d (A_1(x, y_-(x)) - A_1(x, y_+(x))) dx \end{aligned}$$

De manière similaire, on montre que

$$\int_{\partial D \circlearrowleft} A_2 d\vec{l}_2 = \int_{y \in I_y} (A_2(x_+(y), y) - A_2(x_-(y), y)) dy$$

ce qui achève la démonstration de la formule de Green.

2. Formule de Stokes.

Soit S une surface de \mathbb{R}^3 . Pour simplifier, nous supposons qu'il existe un ouvert x et y -simple D de \mathbb{R}^2 et une fonction

$$\begin{aligned} \vec{\sigma} : \quad \mathbb{R}^2 &\rightarrow \mathbb{R}^3 \\ (u, v) &\mapsto \sigma(u, v) \end{aligned}$$

deux fois continûment dérivable sur D , injective sur \overline{D} telle que

$$S = \sigma(\overline{D})$$

(σ est une paramétrisation de S). Nous supposons également que $\|\partial_u \vec{\sigma} \times \partial_v \vec{\sigma}\| \neq 0$ pour tout $(u, v) \in \overline{D}$ et que $\frac{\partial_u \vec{\sigma} \times \partial_v \vec{\sigma}}{\|\partial_u \vec{\sigma} \times \partial_v \vec{\sigma}\|}$ est continue sur \overline{D} .

Notons encore $\gamma : [0, 1] \rightarrow \partial D$ une paramétrisation du bord de D dans le sens trigonométrique comme plus haut.

Par exemple, pour une demi-sphère de rayon R centrée en l'origine, on peut prendre

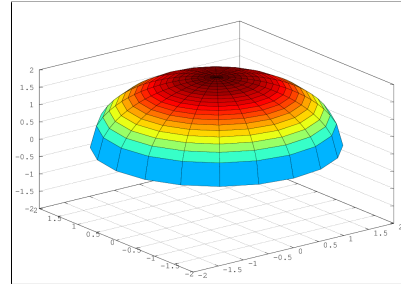
$$D = \left\{ (u, v) \in \mathbb{R}^2 \mid u^2 + v^2 < R^2 \right\}$$

le disque ouvert centré en l'origine de rayon R et

$$\sigma(u, v) = \sqrt{R^2 - u^2 - v^2}$$

Une demi sphère de rayon 2:

```
1 t=0:2*pi/20:2*pi;
2 r=0:0.1:2;
3 [tt,rr]=meshgrid(t,r);
4 xx=rr.*cos(tt);
5 yy=rr.*sin(tt);
6 zz=sqrt(abs(4-xx.^2-yy.^2));
7 surf(xx,yy,zz)
8 axis([-2 2 -2 2 -2 2],"equal")
9 print demisphere.png
```



Soit \vec{A} une fonction de \mathbb{R}^3 dans \mathbb{R}^3 continûment dérivable. Alors, on a l'égalité (formule de Stokes)

$$\int_S (\vec{\nabla} \times \vec{A}) \bullet d\vec{S} = \int_{\partial S} \vec{A} \bullet d\vec{l}$$

En effet, notons

$$\vec{\xi}(t) = \begin{pmatrix} \sigma_1(u_0 + t, v_0) \\ \sigma_2(u_0 + t, v_0) \\ \sigma_3(u_0 + t, v_0) \end{pmatrix} \text{ et } \vec{v}(t) = \begin{pmatrix} \sigma_1(u_0, v_0 + t) \\ \sigma_2(u_0, v_0 + t) \\ \sigma_3(u_0, v_0 + t) \end{pmatrix}$$

alors l'élément de surface est donné par

$$d\vec{S}(u_0, v_0) = \dot{\vec{\xi}} \times \dot{\vec{v}} = \begin{pmatrix} \frac{\partial \sigma_1}{\partial u}(u_0, v_0) \\ \frac{\partial \sigma_2}{\partial u}(u_0, v_0) \\ \frac{\partial \sigma_3}{\partial u}(u_0, v_0) \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \frac{\partial \sigma_1}{\partial v}(u_0, v_0) \\ \frac{\partial \sigma_2}{\partial v}(u_0, v_0) \\ \frac{\partial \sigma_3}{\partial v}(u_0, v_0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial \sigma_2}{\partial u} \frac{\partial \sigma_3}{\partial v} - \frac{\partial \sigma_3}{\partial u} \frac{\partial \sigma_2}{\partial v} \\ \frac{\partial \sigma_3}{\partial u} \frac{\partial \sigma_1}{\partial v} - \frac{\partial \sigma_1}{\partial u} \frac{\partial \sigma_3}{\partial v} \\ \frac{\partial \sigma_1}{\partial u} \frac{\partial \sigma_2}{\partial v} - \frac{\partial \sigma_2}{\partial u} \frac{\partial \sigma_1}{\partial v} \end{pmatrix}$$

et

$$\begin{aligned} \int_S (\vec{\nabla} \times \vec{A}) \bullet d\vec{S} &= \int_D \begin{pmatrix} \frac{\partial A_3(\vec{\sigma}(u,v))}{\partial y} - \frac{\partial A_2(\vec{\sigma}(u,v))}{\partial z} \\ \frac{\partial A_1(\vec{\sigma}(u,v))}{\partial z} - \frac{\partial A_3(\vec{\sigma}(u,v))}{\partial x} \\ \frac{\partial A_2(\vec{\sigma}(u,v))}{\partial x} - \frac{\partial A_1(\vec{\sigma}(u,v))}{\partial y} \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} dS_1(u,v) \\ dS_2(u,v) \\ dS_3(u,v) \end{pmatrix} du dv \\ &= \int_S \left(\frac{\partial A_3(\vec{\sigma}(u,v))}{\partial y} - \frac{\partial A_2(\vec{\sigma}(u,v))}{\partial z} \right) dS_1(u,v) du dv \\ &\quad + \int_S \left(\frac{\partial A_1(\vec{\sigma}(u,v))}{\partial z} - \frac{\partial A_3(\vec{\sigma}(u,v))}{\partial x} \right) dS_2(u,v) du dv \\ &\quad + \int_S \left(\frac{\partial A_2(\vec{\sigma}(u,v))}{\partial x} - \frac{\partial A_1(\vec{\sigma}(u,v))}{\partial y} \right) dS_3(u,v) du dv \\ &= R_1 + R_2 + R_3 \end{aligned}$$

où

$$R_1 = \int_S \left(\frac{\partial A_1(\vec{\sigma}(u, v))}{\partial z} dS_2(u, v) - \frac{\partial A_1(\vec{\sigma}(u, v))}{\partial y} dS_3(u, v) \right) du dv$$

$$R_2 = \int_S \left(\frac{\partial A_2(\vec{\sigma}(u, v))}{\partial x} dS_3(u, v) - \frac{\partial A_2(\vec{\sigma}(u, v))}{\partial z} dS_1(u, v) \right) du dv$$

$$R_3 = \int_S \left(\frac{\partial A_3(\vec{\sigma}(u, v))}{\partial y} dS_1(u, v) - \frac{\partial A_3(\vec{\sigma}(u, v))}{\partial x} dS_2(u, v) \right) du dv$$

Calculons, par exemple,

$$R_1 = \int_S \left(\frac{\partial A_1(\vec{\sigma}(u, v))}{\partial z} dS_2(u, v) - \frac{\partial A_1(\vec{\sigma}(u, v))}{\partial y} dS_3(u, v) \right) du dv$$

$$\int_S \left(\frac{\partial A_1}{\partial z} \left(\frac{\partial \sigma_3}{\partial u} \frac{\partial \sigma_1}{\partial v} - \frac{\partial \sigma_1}{\partial u} \frac{\partial \sigma_3}{\partial v} \right) - \frac{\partial A_1}{\partial y} \left(\frac{\partial \sigma_1}{\partial u} \frac{\partial \sigma_2}{\partial v} - \frac{\partial \sigma_2}{\partial u} \frac{\partial \sigma_1}{\partial v} \right) \right) du dv$$

Par ailleurs,

$$\int_{\partial S} \vec{A} \bullet d\vec{l} = \int_0^1 \vec{A}(\vec{\sigma}(\vec{\gamma}(t))) \bullet \frac{d}{dt} (\vec{\sigma} \circ \vec{\gamma})(t) dt = \int_0^1 A_1(\vec{\sigma}(\vec{\gamma}(t))) \left(\frac{\partial \sigma_1}{\partial u} \dot{\gamma}_1(t) + \frac{\partial \sigma_1}{\partial v} \dot{\gamma}_2(t) \right) dt$$

$$+ \int_0^1 A_2(\vec{\sigma}(\vec{\gamma}(t))) \left(\frac{\partial \sigma_1}{\partial u} \dot{\gamma}_2(t) + \frac{\partial \sigma_2}{\partial v} \dot{\gamma}_2(t) \right) dt + \int_0^1 A_3(\vec{\sigma}(\vec{\gamma}(t))) \left(\frac{\partial \sigma_1}{\partial u} \dot{\gamma}_3(t) + \frac{\partial \sigma_3}{\partial v} \dot{\gamma}_2(t) \right) dt$$

Calculons par exemple

$$\int_0^1 A_1(\vec{\sigma}(\vec{\gamma}(t))) \left(\frac{\partial \sigma_1}{\partial u} \dot{\gamma}_1(t) + \frac{\partial \sigma_1}{\partial v} \dot{\gamma}_2(t) \right) dt = \int_0^1 \begin{pmatrix} A_1(\vec{\sigma}(\vec{\gamma}(t))) \frac{\partial \sigma_1}{\partial u} \\ A_1(\vec{\sigma}(\vec{\gamma}(t))) \frac{\partial \sigma_1}{\partial v} \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} \dot{\gamma}_1(t) \\ \dot{\gamma}_2(t) \end{pmatrix} dt$$

$$= \int_{\partial D \cup} \begin{pmatrix} A_1(\vec{\sigma}(\vec{\gamma}(t))) \frac{\partial \sigma_1}{\partial u} \\ A_1(\vec{\sigma}(\vec{\gamma}(t))) \frac{\partial \sigma_1}{\partial v} \end{pmatrix} \bullet d\vec{l} \stackrel{Green}{=} \int_D \left(\partial_u \left(A_1(\vec{\sigma}(u, v)) \frac{\partial \sigma_1}{\partial v} \right) - \partial_v \left(A_1(\vec{\sigma}(u, v)) \frac{\partial \sigma_1}{\partial u} \right) \right) du dv$$

$$= \int_D \left(\left(\frac{\partial A_1}{\partial x} \frac{\partial \sigma_1}{\partial u} + \frac{\partial A_1}{\partial y} \frac{\partial \sigma_2}{\partial u} + \frac{\partial A_1}{\partial z} \frac{\partial \sigma_3}{\partial u} \right) \frac{\partial \sigma_1}{\partial v} - \left(\frac{\partial A_1}{\partial x} \frac{\partial \sigma_1}{\partial v} + \frac{\partial A_1}{\partial y} \frac{\partial \sigma_2}{\partial v} + \frac{\partial A_1}{\partial z} \frac{\partial \sigma_3}{\partial v} \right) \frac{\partial \sigma_1}{\partial u} \right) dS$$

$$= \int_D \left(\frac{\partial A_1}{\partial z} \left(\frac{\partial \sigma_3}{\partial u} \frac{\partial \sigma_1}{\partial v} - \frac{\partial \sigma_3}{\partial v} \frac{\partial \sigma_1}{\partial u} \right) - \frac{\partial A_1}{\partial y} \left(\frac{\partial \sigma_2}{\partial v} \frac{\partial \sigma_1}{\partial u} - \frac{\partial \sigma_2}{\partial u} \frac{\partial \sigma_1}{\partial v} \right) \right) du dv = R_1$$

On démontre de la même manière les égalités pour R_2 et R_3 , ce qui achève la démonstration de la formule Stokes.

EXEMPLE 4.2. Notons

$$\vec{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \text{ et } \vec{A}(\vec{r}) = \begin{pmatrix} -y \\ x \\ 0 \end{pmatrix} \text{ et } \Sigma = \left\{ \vec{r} \in \mathbb{R}^3 \mid z = 0 \text{ et } \|\vec{r}\| = \sqrt{x^2 + y^2} \leq R \right\} \text{ avec } \vec{n}_\Sigma = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

La surface Σ est un disque d'orientation \vec{n}_Σ . Alors

$$\partial\Sigma = \left\{ \vec{r} \in \mathbb{R}^3 \mid z = 0 \text{ et } \|\vec{r}\| = \sqrt{x^2 + y^2} = R \right\}$$

et

$$\vec{\nabla} \times \vec{A} = \begin{pmatrix} \partial_x \\ \partial_y \\ \partial_z \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -y \\ x \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \int_{\Sigma} (\vec{\nabla} \times \vec{A}) \bullet d\vec{S} = 2\pi R^2$$

Par ailleurs,

$$\int_{\partial\Sigma \cup} \vec{A} \bullet d\vec{l} = \int_{\partial\Sigma} \|\vec{A}\| dl = R 2\pi R = 2\pi R^2$$

car sur le bord du disque,

$$\vec{r} = R \begin{pmatrix} \cos(\alpha) \\ \sin(\alpha) \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \vec{A}(\vec{r}) = R \begin{pmatrix} -\sin(\alpha) \\ \cos(\alpha) \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \|\vec{A}\| = R$$

3. Formule d'Ostrogradsky.

Considérons le cube

$$\Omega = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mid -\varepsilon \leq x \leq \varepsilon \text{ et } -\varepsilon \leq y \leq \varepsilon \text{ et } -\varepsilon \leq z \leq \varepsilon \right\}$$

Notons les faces du cubes par

$$\begin{aligned} \partial\Omega_{x\pm} &= \left\{ \begin{pmatrix} \pm\varepsilon \\ y \\ z \end{pmatrix} \mid -\varepsilon \leq y \leq \varepsilon \text{ et } -\varepsilon \leq z \leq \varepsilon \right\} \\ \partial\Omega_{y\pm} &= \left\{ \begin{pmatrix} x \\ \pm\varepsilon \\ z \end{pmatrix} \mid -\varepsilon \leq x \leq \varepsilon \text{ et } -\varepsilon \leq z \leq \varepsilon \right\} \\ \partial\Omega_{z\pm} &= \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ \pm\varepsilon \end{pmatrix} \mid -\varepsilon \leq x \leq \varepsilon \text{ et } -\varepsilon \leq y \leq \varepsilon \right\} \end{aligned}$$

et le bord du cube par

$$\partial\Omega = \partial\Omega_{x+} \cup \partial\Omega_{x-} \cup \partial\Omega_{y+} \cup \partial\Omega_{y-} \cup \partial\Omega_{z+} \cup \partial\Omega_{z-}$$

Pour tout point du bord du cube, définissons le **vecteur normal à la surface** par (voir figure 4)

$$\vec{r} \in \partial\Omega \Rightarrow \vec{n}(\vec{r}) = \begin{cases} \vec{e}_1 & \text{si } \vec{r} \in \partial\Omega_{x+} \\ -\vec{e}_1 & \text{si } \vec{r} \in \partial\Omega_{x-} \\ \vec{e}_2 & \text{si } \vec{r} \in \partial\Omega_{y+} \\ -\vec{e}_2 & \text{si } \vec{r} \in \partial\Omega_{y-} \\ \vec{e}_3 & \text{si } \vec{r} \in \partial\Omega_{z+} \\ -\vec{e}_3 & \text{si } \vec{r} \in \partial\Omega_{z-} \end{cases}$$

où $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ désigne la base canonique

$$\vec{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{e}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

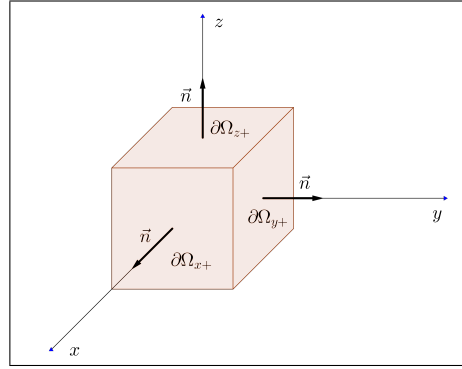


FIGURE 4.

Soit $\vec{A} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$. Alors,

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \operatorname{div}(\vec{A}) \, dV &= \int_{\Omega} (\partial_x A_1 + \partial_y A_2 + \partial_z A_3) \, dV = \int_{\Omega} \partial_x A_1 \, dV + \int_{\Omega} \partial_y A_2 \, dV + \int_{\Omega} \partial_z A_3 \, dV \\ &= \int_{y=-\varepsilon}^{\varepsilon} \left(\int_{z=-\varepsilon}^{\varepsilon} \underbrace{\left(\int_{x=-\varepsilon}^{\varepsilon} \partial_x A_1 \, dx \right)}_{=A_1(\varepsilon, y, z) - A_1(-\varepsilon, y, z)} \, dz \right) dy \\ &\quad + \int_{x=-\varepsilon}^{\varepsilon} \left(\int_{z=-\varepsilon}^{\varepsilon} \underbrace{\left(\int_{y=-\varepsilon}^{\varepsilon} \partial_y A_2 \, dy \right)}_{=A_2(x, \varepsilon, z) - A_2(x, -\varepsilon, z)} \, dz \right) dx \\ &\quad + \int_{x=-\varepsilon}^{\varepsilon} \left(\int_{y=-\varepsilon}^{\varepsilon} \underbrace{\left(\int_{z=-\varepsilon}^{\varepsilon} \partial_z A_3 \, dz \right)}_{=A_3(x, y, \varepsilon) - A_3(x, y, -\varepsilon)} \, dy \right) dx \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \int_{y=-\varepsilon}^{\varepsilon} \left(\int_{z=-\varepsilon}^{\varepsilon} \vec{A}(\varepsilon, y, z) \bullet \vec{e}_1 dz \right) dy - \int_{y=-\varepsilon}^{\varepsilon} \left(\int_{z=-\varepsilon}^{\varepsilon} \vec{A}(-\varepsilon, y, z) \bullet \vec{e}_1 dz \right) dy \\
&= \int_{x=-\varepsilon}^{\varepsilon} \left(\int_{z=-\varepsilon}^{\varepsilon} \vec{A}(x, \varepsilon, z) \bullet \vec{e}_2 dz \right) dx - \int_{x=-\varepsilon}^{\varepsilon} \left(\int_{z=-\varepsilon}^{\varepsilon} \vec{A}(x, -\varepsilon, z) \bullet \vec{e}_2 dz \right) dx \\
&= \int_{x=-\varepsilon}^{\varepsilon} \left(\int_{y=-\varepsilon}^{\varepsilon} \vec{A}(x, y, \varepsilon) \bullet \vec{e}_3 dy \right) dx - \int_{x=-\varepsilon}^{\varepsilon} \left(\int_{y=-\varepsilon}^{\varepsilon} \vec{A}(x, y, -\varepsilon) \bullet \vec{e}_3 dy \right) dx \\
&= \int_{\partial\Omega} \vec{A} \bullet \underbrace{\vec{n} dS}_{=: d\vec{S}} = \int_{\partial\Omega} \vec{A} \bullet d\vec{S}
\end{aligned}$$

La généralisation de cette égalité à un sous-ensemble (quelconque mais suffisamment régulier) Ω de \mathbb{R}^3 est connue sous le nom de **formule d'Ostrogradsky**

$$\boxed{\int_{\Omega} \operatorname{div}(\vec{A}) dV = \int_{\partial\Omega} \vec{A} \bullet d\vec{S}}$$

EXEMPLE 4.3. Notons

$$\vec{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \text{ et } \vec{A}(\vec{r}) = \vec{r} \text{ et } \Omega = \left\{ \vec{r} \in \mathbb{R}^3 \mid \|\vec{r}\| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \leq R \right\}$$

Alors

$$\partial\Omega = \left\{ \vec{r} \in \mathbb{R}^3 \mid \|\vec{r}\| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = R \right\}$$

et

$$\vec{\nabla} \bullet \vec{A} = 3 \text{ et } \int_{\Omega} (\vec{\nabla} \bullet \vec{A}) dV = 3 \frac{4}{3} \pi R^3 = 4\pi R^3$$

Par ailleurs,

$$\int_{\partial\Omega} \vec{A} d\vec{S} = \int_{\partial\Omega} \|\vec{A}\| dS = R 4\pi R^2 = 4\pi R^3$$

CHAPITRE 3

Forces conservatives

1. Définition

Une force $\vec{F}(\vec{r})$ est dite **conservative** si elle dérive d'un potentiel, c'est-à-dire s'il existe une fonction $U : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ telle que

$$\vec{F}(\vec{r}) = -(\vec{\nabla}U)(\vec{r}) = - \begin{pmatrix} (\partial_x U)(\vec{r}) \\ (\partial_y U)(\vec{r}) \\ (\partial_z U)(\vec{r}) \end{pmatrix}$$

2. Travail

Le travail d'une force conservative \vec{F} ne dépend pas du chemin parcouru. En effet, notons $\vec{r}(t)$ l'horaire d'une masse ponctuelle. Notons $A = \vec{r}(t_0)$, $B = \vec{r}(t_1)$ (avec $t_0 < t_1$) et \mathcal{C} la trajectoire de m entre A et B , c'est-à-dire, $\mathcal{C} = \vec{r}([t_0, t_1])$. Alors, le travail de \vec{F} le long de \mathcal{C} est donné par

$$\begin{aligned} A_{\vec{F}} &= \int_A^B \vec{F} \bullet d\vec{l} = \int_{t_0}^{t_1} \vec{F}(\vec{r}(t)) \bullet \dot{\vec{r}} dt = - \int_{t_0}^{t_1} (\vec{\nabla}U)(\vec{r}(t)) \bullet \dot{\vec{r}} dt = - \int_{t_0}^{t_1} \frac{d}{dt} U(\vec{r}(t)) dt \\ &= -(U(\vec{r}(t_1)) - U(\vec{r}(t_0))) = -(U(B) - U(A)) \end{aligned}$$

qui est indépendant du chemin \mathcal{C} reliant A à B . Réciproquement, si le travail d'une force ne dépend pas du chemin parcouru, on peut montrer, sous certaines hypothèses, qu'elle est conservative. L'étude dans un cadre plus général de cette implication a donné lieu à une théorie mathématique connue sous le nom de cohomologie de de Rham qui a été développée par le mathématicien (et alpiniste !) vaudois Georges de Rham (Roche 1903 - Lausanne 1990).



Georges de Rham

3. Exemples et contre-exemples

1. La gravitation.

Considérons deux masses M et m sphériques, homogènes et isotropes (comme c'est le cas en bonne approximation, par exemple, pour la Terre, le Soleil, la Lune, ...). Rappelons que la force de gravitation exercée par la masse M sur la masse m est donnée par

$$\vec{F}_{M/m} = -G \frac{Mm}{\|\vec{r}\|^2} \frac{\vec{r}}{\|\vec{r}\|} = -G \frac{Mm}{\|\vec{r}\|^3} \vec{r}$$

où \vec{r} désigne la position de la masse m relativement à un référentiel attaché au centre de la masse M .

On définit le **champ de gravité** de M par

$$\vec{g}_M(\vec{r}) = -G \frac{M}{\|\vec{r}\|^2} \frac{\vec{r}}{\|\vec{r}\|}$$

Ainsi,

$$\vec{F}_{M/m} = m\vec{g}_M(\vec{r})$$

On définit le **potentiel de gravitation** de M par

$$V(\vec{r}) = -G \frac{M}{\|\vec{r}\|}$$

et l'**énergie potentielle de gravitation** de m par

$$U = mV(\vec{r})$$

Un calcul simple donne

$$\begin{aligned} (\partial_x V) &= \partial_x \left(-G \frac{M}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \right) = \partial_x \left(-GM (x^2 + y^2 + z^2)^{-\frac{1}{2}} \right) \\ &= GM \frac{1}{2} (x^2 + y^2 + z^2)^{-\frac{3}{2}} (\partial_x x^2) = GM \frac{1}{2} \frac{1}{\left(\sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \right)^3} 2x = G \frac{M}{\|\vec{r}\|^3} x \end{aligned}$$

Par conséquent,

$$-(\vec{\nabla} V)(\vec{r}) = - \begin{pmatrix} (\partial_x V)(\vec{r}) \\ (\partial_y V)(\vec{r}) \\ (\partial_z V)(\vec{r}) \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} G \frac{M}{\|\vec{r}\|^3} x \\ G \frac{M}{\|\vec{r}\|^3} y \\ G \frac{M}{\|\vec{r}\|^3} z \end{pmatrix} = -G \frac{M}{\|\vec{r}\|^3} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = -G \frac{M}{\|\vec{r}\|^3} \vec{r} = \vec{g}(\vec{r})$$

et

$$\vec{F}_{M/m} = -(\vec{\nabla} U)$$

ce qui montre que la force de gravitation est conservative.

REMARQUE 3.1. L'énergie potentielle de gravitation (qui est négative) d'une masse m en un point A dans le champ de gravitation d'une masse M est égale au travail de la force de gravitation pour un chemin $\mathcal{C}_{A \rightarrow \infty}$ allant du point A à l'infini:

$$\int_{\mathcal{C}_{A \rightarrow \infty}} \vec{F}_{M/m} \bullet d\vec{l} = - \int_{\mathcal{C}_{A \rightarrow \infty}} (\vec{\nabla} U) \bullet d\vec{l} = - \left(U(\vec{r}) \Big|_A^\infty \right) = - \underbrace{U(\infty)}_{=0} - (-U(A)) = U(A)$$

En d'autres termes, l'énergie potentiel est égale à **l'opposé** du travail qu'il faut fournir pour amener m de A à l'infini.

2. La force électrique.

D'après la loi de Coulomb, la force qu'une charge électrique q_1 exerce sur une charge q_2 est donnée par

$$\vec{F}_{q_1/q_2} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 \cdot q_2}{\|\vec{r}\|^2} \frac{\vec{r}}{\|\vec{r}\|} \text{ où } \vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1$$

et où \vec{r}_1 et \vec{r}_2 sont les positions des charges q_1 et q_2 . Hormis les constantes, l'expression mathématique de cette force est identique à celle pour la force de gravitation. Par conséquent, elle est aussi conservative. En effet,

$$\vec{F}_{q_1/q_2} = -\vec{\nabla} V_{q_1} \cdot q_2 \text{ où } V_{q_1} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{q_1}{\|\vec{r}\|}$$

3. Forces de frottement.

Les forces de frottement ne sont pas conservatives car leur travail dépend de la trajectoire (de sa longueur). Par exemple, le travail d'une force de frottement constante est donné par

$$A_{frot} = \|\vec{F}_{frot}\| \cdot L$$

où L est la longueur de la trajectoire.

4. Energie mécanique

DÉFINITION 4.1. Pour une masse m subissant une force conservative $\vec{F} = -\vec{\nabla}U$, on définit l'énergie mécanique par

$$E_{mec} = \frac{1}{2}m\|\vec{v}\|^2 + U$$

c'est-à-dire l'énergie cinétique plus l'énergie potentielle.

THÉORÈME 4.2. Pour une masse m subissant une force conservative et éventuellement des forces normales à sa vitesse en tout point de sa trajectoire (i.e. perpendiculaires à sa trajectoire), l'énergie mécanique est conservée: pour tous les temps $t_0 < t_1$,

$$\frac{1}{2}m\|\vec{v}(t_0)\|^2 + U(\vec{r}(t_0)) = \frac{1}{2}m\|\vec{v}(t_1)\|^2 + U(\vec{r}(t_1))$$

DÉMONSTRATION. En dérivant par rapport au temps, on trouve

$$\begin{aligned} \frac{d E_{mec}}{dt} &= \frac{1}{2}m \left(\frac{d}{dt} (v_x(t)^2) + \frac{d}{dt} (v_y(t)^2) + \frac{d}{dt} (v_z(t)^2) \right) + \frac{d}{dt} U(x(t), y(t), z(t)) \\ &= \frac{1}{2}m (2v_x(t)\dot{v}_x(t) + 2v_y(t)\dot{v}_y(t) + 2v_z(t)\dot{v}_z(t)) \\ &\quad + (\partial_x U) \cdot \dot{x}(t) + (\partial_y U) \cdot \dot{y}(t) + (\partial_z U) \cdot \dot{z}(t) \\ &= m\vec{v}(t) \bullet \vec{v}(t) + (\vec{\nabla}U) \bullet \vec{v}(t) = m\vec{a} \bullet \vec{v} - \vec{F} \bullet \vec{v} = \vec{F}_{res} \bullet \vec{v} - \vec{F} \bullet \vec{v} \\ &= (\vec{F} + \vec{F}_\perp) \bullet \vec{v} - \vec{F} \bullet \vec{v} = \vec{F} \bullet \vec{v} + \underbrace{\vec{F}_\perp \bullet \vec{v}}_{=0} - \vec{F} \bullet \vec{v} = 0 \end{aligned}$$

ce qui montre que l'énergie mécanique est constante au cours du mouvement. □

Rappelons le théorème de l'énergie cinétique:

THÉORÈME 4.3. *Le travail de la force résultante agissant sur une masse m est égal à la variation de son énergie cinétique: soit $\mathcal{C}_{A \rightarrow B}$ la trajectoire d'une masse m allant d'un point A à un point B et subissant une force résultant \vec{F}_{res} . Alors*

$$A_{\vec{F}_{res}} = \int_{\mathcal{C}_{A \rightarrow B}} \vec{F}_{res} \bullet d\vec{l} = \frac{1}{2}m\|\vec{v}_B\|^2 - \frac{1}{2}m\|\vec{v}_A\|^2$$

DÉMONSTRATION. Soit $\vec{r}: [t_0, t_1] \rightarrow \mathbb{R}^3$ (2 fois continûment dérivable) l'horaire de la masse m (en particulier $\vec{r}([t_0, t_1]) = \mathcal{C}_{A \rightarrow B}$ avec $\vec{r}(t_0) = A$ et $\vec{r}(t_1) = B$). En vertu du théorème fondamental du calcul différentiel, on trouve

$$\begin{aligned} A_{\vec{F}_{res}} &= \int_{\mathcal{C}_{A \rightarrow B}} \vec{F}_{res} \bullet d\vec{l} = \int_{t_0}^{t_1} \vec{F}_{res}(t) \bullet \dot{\vec{r}}(t) dt = \int_{t_0}^{t_1} m\vec{a}(t) \bullet \vec{v}(t) dt = \int_{t_0}^{t_1} m \frac{1}{2} \frac{d}{dt} (\vec{v}(t) \bullet \vec{v}(t)) dt \\ &= \int_{t_0}^{t_1} \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} m \|\vec{v}(t)\|^2 \right) dt = \frac{1}{2} m \|\vec{v}(t_1)\|^2 - \frac{1}{2} m \|\vec{v}(t_0)\|^2 \end{aligned}$$

□

De ce qui précède, nous déduisons que

THÉORÈME 4.4. *La variation de l'énergie mécanique d'une masse m subissant des forces conservatives, des forces qui ne travaillent pas (i.e. perpendiculaires à la trajectoire en tout point) et des forces non conservatives est égale au travail des forces non conservatives: soit $\mathcal{C}_{A \rightarrow B}$ la trajectoire d'une masse m subissant une force conservative $\vec{F}_{\perp} = -\vec{\nabla}U$, une force qui ne travaille pas \vec{f}_{\perp} et une force non conservative \vec{F}_{\parallel} (i.e. $\vec{F}_{res} = \vec{F}_{\perp} + \vec{f}_{\perp} + \vec{F}_{\parallel}$). Alors*

$$\Delta E_{mec} = E_{mec B} - E_{mec A} = A_{\vec{F}_{\parallel}} = \int_{\mathcal{C}_{A \rightarrow B}} \vec{F}_{\parallel} \bullet d\vec{l}$$

DÉMONSTRATION. En vertu du théorème de l'énergie cinétique, il vient

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}m\|\vec{v}_B\|^2 - \frac{1}{2}m\|\vec{v}_A\|^2 &= \int_{\mathcal{C}_{A \rightarrow B}} \vec{F}_{res} \bullet d\vec{l} = \int_{\mathcal{C}_{A \rightarrow B}} (\vec{F}_{\perp} + \vec{f}_{\perp} + \vec{F}_{\parallel}) \bullet d\vec{l} \\ &= \underbrace{\int_{\mathcal{C}_{A \rightarrow B}} \vec{F}_{\perp} \bullet d\vec{l}}_{U(B)-U(A)} + \underbrace{\int_{\mathcal{C}_{A \rightarrow B}} \vec{f}_{\perp} \bullet d\vec{l}}_{=0} + \int_{\mathcal{C}_{A \rightarrow B}} \vec{F}_{\parallel} \bullet d\vec{l} = -(U(B) - U(A)) + \int_{\mathcal{C}_{A \rightarrow B}} \vec{F}_{\parallel} \bullet d\vec{l} \\ &\Rightarrow \int_{\mathcal{C}_{A \rightarrow B}} \vec{F}_{\parallel} \bullet d\vec{l} = \frac{1}{2}m\|\vec{v}_B\|^2 - \frac{1}{2}m\|\vec{v}_A\|^2 + U(B) - U(A) = E_{mec B} - E_{mec A} \end{aligned}$$

□

CHAPITRE 4

Equations de Maxwell

En 1865, le physicien écossais James Clerk Maxwell (1831-1879) publie sous la forme d'un système d'équations (initialement 20 équations à 20 inconnues, réduit par la suite par Heaviside à un système de 4 équations que nous verrons plus loin) une synthèse des diverses lois expérimentales concernant l'électricité et le magnétisme établies par ses prédécesseurs.

1. Champs électrique et magnétique

Les atomes (~ 1 angström=0.1 nm) sont électriquement neutres. Ils sont composés de particules neutres (les neutrons dans le noyau) et de particules chargées: les protons (+) et les électrons (-). Un courant est un mouvement de charges (par exemple d'électrons). Un courant de 1 ampère (A) correspond à un débit de charges de 1 coulomb (C) par seconde. La charge de l'électron et du proton vaut (au signe près) $1.602 \cdot 10^{-19}$ C. Il faut donc $\frac{1}{1.602} \cdot 10^{19} \approx 6.24 \cdot 10^{18}$ électrons pour faire un coulomb et un débit de $6.24 \cdot 10^{18}$ électrons par seconde pour faire un courant de 1 ampère.

Une particule de charge q se déplaçant à vitesse \vec{v} dans un référentiel galiléen R subit une force (dite de Lorentz) donnée par

$$\vec{F} = q \left(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B} \right)$$

où \vec{E} est le champ électrique où se trouve la charge et \vec{B} le champ magnétique.

2. Champ électrique

Le **champ électrique** est une propriété du vide. Il est décrit dans le référentiel d'inertie R par une fonction

$$\begin{aligned} \vec{E} : \mathbb{R}^4 &\rightarrow \mathbb{R}^3 \\ (\vec{x}, t) &\mapsto \vec{E}(\vec{x}, t) \end{aligned}$$

On mesure la valeur du champ électrique en \vec{x} au temps t en plaçant une charge immobile q de masse m en \vec{x} au temps t et en mesurant son accélération \vec{a} (si le champ de gravitation est négligeable). Le champ électrique est donné par (il suffit de remplacer dans l'expression pour la force de Lorentz \vec{v} par $\vec{0}$ et \vec{F} par $m\vec{a}$):

$$\vec{E}(\vec{x}, t) = \frac{m}{q} \vec{a}$$

Les unités du champ électrique sont: $[E] = 1 \frac{\text{volt}}{\text{m}} = 1 \frac{\text{V}}{\text{m}} = 1 \frac{\text{N}}{\text{C}} = 1 \frac{\text{kg} \cdot \text{m}}{\text{A} \cdot \text{s}^2} = 1 \frac{\text{kg} \cdot \text{m}}{\text{A} \cdot \text{s}^3}$

3. Effet du champ électrique sur la matière

3.1. Matière conductrice.

Il s'agit de matière contenant des charges libres, comme par exemple

- les métaux: 1 à 2 électrons libres par atome (Ex: Cu, Ag, Au),

- les électrolytes: liquides contenant des ions (Ex: Na^+ , Cl^-),
- les gaz ionisés (Ex: Ne^+)

Lorsque l'on place un conducteur dans un champ électrique \vec{E}_{ext} , il se produit un phénomène de polarisation. Les charges + s'accumulent sur une face du conducteur et les charges - sur la face opposée. Il apparaît alors dans le conducteur un champ \vec{E}' qui s'oppose au champ \vec{E}_{ext} et qui fini par le compenser exactement. Le champ résultant \vec{E} est alors nul

$$\vec{E} = \vec{E}_{ext} + \vec{E}' = \vec{0}$$

et la séparation des charges s'arrête. Il y a équilibre. Ce phénomène est illustré sur la figure 1. Les symboles \ominus représentent les électrons libres. La source du champ \vec{E}' sont les charges de polarisation $-Q$ et $+Q$.

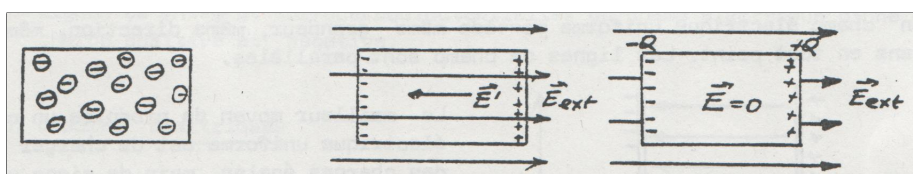


FIGURE 1. Effet d'un champ électrique sur la matière conductrice. (Dessin: Collège de Candolle)

Le phénomène de polarisation a plusieurs conséquences.

- (1) A l'intérieur d'un conducteur (plein ou creux) en équilibre électrique (pas de charges en mouvement), le champ électrique est nul (c'est la **cage de Faraday**).
- (2) A la surface d'un conducteur, le champ électrique est normal à sa surface, car s'il y avait une composante tangentielle, alors les charges se déplaceraient sur la surface du conducteur et l'équilibre ne serait pas atteint.
- (3) Toute la charge électrique d'un conducteur en équilibre est localisée à sa surface. Il n'y a donc pas de charge à l'intérieur qui est accumulée.

Les charges + et - se séparant dans un conducteur créent un champ en dehors qui se superpose au champ extérieur et le déforme (voir figure 2, gauche). Cette déformation du champ est particulièrement évidente pour un conducteur comportant une pointe. La densité des lignes de champ est alors importante sur la pointe: c'est l'effet pointe (voir figure 2, droite).

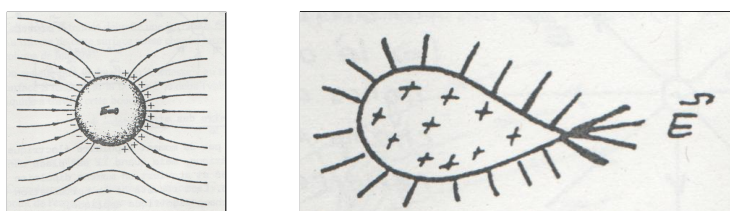


FIGURE 2. A gauche: déformation du champ par une sphère métallique placée dans un champ électrique uniforme. A droite: effet pointe. (Dessin: Collège de Candolle)

3.2. Matière isolante.

Il s'agit de matière ne contenant pas (ou très peu) de charges libres. On la désigne généralement par "matière **diélectrique**". L'influence du champ électrique va donc se manifester sur des charges liées, soit des couples de charges + et -.

Considérons pour commencer l'action du champ sur un système simple: le dipôle (voir figure 3). Si le champ est uniforme, les forces \vec{F}_+ et \vec{F}_- sont égales en direction et en intensité et le dipôle est sollicité par un couple de forces (un moment) qui vaut (relativement au centre de masse du dipôle):

$$\vec{M} = \vec{l} \times \vec{F}_+ = q\vec{l} \times \vec{E} = \vec{p} \times \vec{E}$$

où

$$\vec{p} = q\vec{l}$$

est appelé le moment dipolaire électrique. Remarquons que

$$\|\vec{M}\| = ql\|\vec{E}\| \sin(\alpha)$$

Le moment \vec{M} agissant sur le dipôle a tendance à l'orienter parallèlement au champ \vec{E} . Quand le dipôle est aligné avec le champ électrique, les forces électriques déforment le dipôle, c'est-à-dire augmentent la distance entre les charges. Si la distance l varie, alors le moment dipolaire \vec{p} varie aussi.

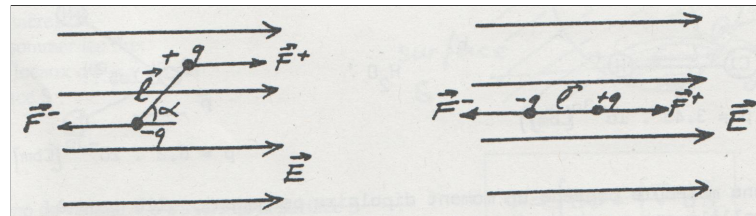


FIGURE 3. Effet du champ sur un dipôle. (Dessin: Collège de Candolle)

Si le champ \vec{E} n'est pas uniforme, par exemple s'il croît dans le sens des lignes de champ, il découle que $\|\vec{F}_+\| > \|\vec{F}_-\|$ et le dipôle est entraîné dans le sens du champ. Le dipôle est toujours entraîné dans le sens où le champ augmente en intensité (là où les lignes de champ se resserrent, voir figure 4).

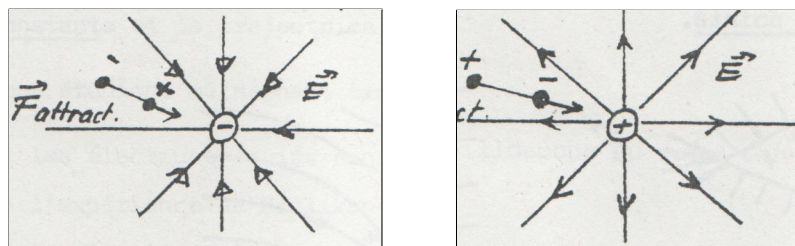


FIGURE 4. Dipôle dans un champ non uniforme. (Dessin: Collège de Candolle)

Quand un atome est placé dans un champ électrique, il devient polarisé et acquiert un moment dipolaire électrique induit par la direction du champ. Ceci résulte de la perturbation de la répartition des électrons autour du noyau causée par le champ électrique.

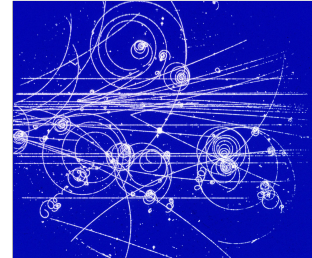
Beaucoup de molécules possèdent un moment dipolaire permanent (voir figure 5). Quand une molécule possède un moment dipolaire permanent, elle tend à s'orienter parallèlement au champ électrique en raison du couple auquel elle est soumise.

4. Champ magnétique

De même, le **champ magnétique** est une propriété du vide. Il est décrit par une fonction

$$\begin{aligned}\vec{B} : \mathbb{R}^4 &\rightarrow \mathbb{R}^3 \\ (\vec{x}, t) &\mapsto \vec{B}(\vec{x}, t)\end{aligned}$$

On mesure la direction du champ magnétique en \vec{x} au temps t en plaçant en \vec{x} au temps t une boussole. L'intensité du champ magnétique peut se mesurer par exemple en plaçant une charge q de masse m avec une vitesse \vec{v} parallèle au champ électrique et en mesurant le rayon de courbure r de sa trajectoire (le rayon du cercle osculateur). Dans cette situation, la force centripète subie par la charge est donnée par (en notant $v = \|\vec{v}\|$, $B = \|\vec{B}\|$ et α l'angle entre \vec{v} et \vec{B})



$$\|m\vec{a} - q\vec{E}\| = |q|\|\vec{v} \times \vec{B}\| = m \frac{v^2}{r} = |q| \sin(\alpha) v B \Rightarrow B = \frac{m}{|q|} \frac{v}{r \sin(\alpha)}$$

Finalement, le sens du champ magnétique, est déterminé par la “règle de la main droite” ! Les unités du champ électrique sont: $[B]=1 \text{ tesla}=1 \text{ T}=1 \frac{\text{N}}{\text{C}\cdot\text{m}} = 1 \frac{\text{kg}\cdot\text{m}}{\text{s}^2\cdot\text{A}} = 1 \frac{\text{kg}}{\text{A}\cdot\text{s}^2}$. De plus, $1 \text{ T}=10^4$ gauss (G). Par exemple, le champ magnétique terrestre vaut $\sim 0.5 \text{ G}$ et le champ principal de l'IRM des HUG vaut 3 T .

5. Densités de charge et de courant

Dans un référentiel galiléen R , on note ρ la **densité de charge** (unités: $\frac{\text{C}}{\text{m}^3}$) et \vec{j} la **densité de courant** (unités: $\frac{\text{A}}{\text{m}^2}$): la charge électrique q contenue dans une partie V de l'espace est donnée par

$$q = \int_V \rho(\vec{x}) dV$$

et le courant I traversant une surface S est donné par

$$I = \int_S \vec{j}(\vec{x}) \cdot d\vec{S}$$

REMARQUE 5.1. Par convention, le courant va de la borne positive d'un générateur à la borne négative. Quand les porteurs de charges sont des électrons, ceux-ci se déplacent dans le sens contraire du courant. Le vecteur \vec{j} indique le sens des charges positives.

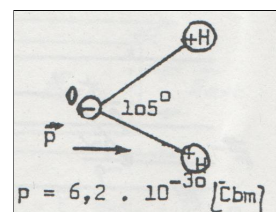
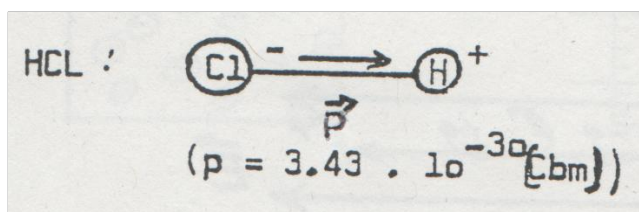


FIGURE 5. Exemples de molécules ayant un moment dipolaire permanent: HCl ($p \approx 3.43 \cdot 10^{-30} \text{C} \cdot \text{m}$) à gauche, H_2O ($p \approx 6.2 \cdot 10^{-30} \text{C} \cdot \text{m}$) à droite. (Dessin: Collège de Candolle)

Le courant électrique est défini comme le mouvement de charges électriques, typiquement à l'intérieur d'un corps conducteur. L'intensité du courant I est le nombre de charges traversant une section du corps en un intervalle de temps Δt (voir figure 6):

$$I = \frac{\Delta q}{\Delta t} \quad \text{unité} \quad \frac{C}{s} = \text{Ampères } A$$

N.B. Pour des raisons historiques le **courant conventionnel** représente un mouvement de charges **positives**. Etant donné que dans un solide il s'agit toujours du mouvement d'électrons négatifs, les charges se déplacent en fait dans le sens opposé au courant conventionnel, comme on peut voir sur le croquis suivant.

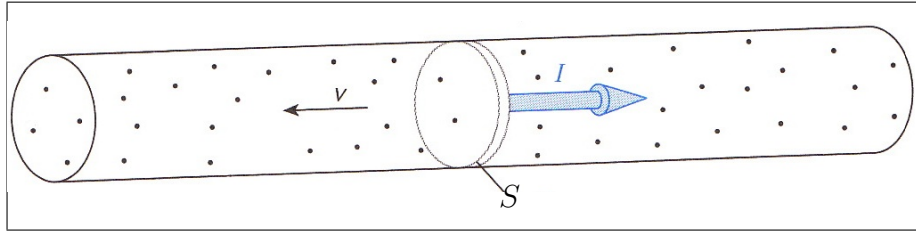


FIGURE 6. Courant électrique

DÉFINITION 5.2. Soit $\vec{A} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ et S une surface orientée. On définit Φ , le **flux de \vec{A} à travers la surface orientée S** , par

$$\Phi = \int_S \vec{A} \bullet d\vec{S}$$

EXEMPLE 5.3. Considérons, à titre d'exemple, un fluide, de masse volumique constante ρ , dans un tuyau. Soit $\vec{v} : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^3$ la fonction (appelée **champ de vecteur vitesse**) qui en chaque point $\vec{r} = (x, y, z)$ du tuyau donne la vitesse $\vec{v}(\vec{r}, t) = \vec{v}(x, y, z, t)$ de la particule du fluide se trouvant en ce point \vec{r} au temps t . Le flux de \vec{v} à travers une surface S coupant le tuyau

$$\Phi(t) = \int_S \vec{v}(t) \bullet d\vec{S}$$

est proportionnel au débit:

$$D = \rho \Phi \text{ unités: kg/s}$$

En effet, considérons la situation simple illustrée sur la figure 7. Le champ de vitesse est constant et la surface est plane. En un temps t , la masse de fluide traversant la surface S vaut $\rho \cdot V$ où V désigne le volume du parallélépipède de la figure 7. En d'autres termes

$$D = \frac{\rho v t \sin(\alpha) S}{t} = \rho \cos(\beta) S v = \rho \vec{S} \bullet \vec{v}$$

où \vec{S} est le vecteur normal à S dont la longueur est égale à la surface S . Remarquons que $\beta = \frac{\pi}{2} - \alpha$.

6. Equations de Maxwell

Les équations de Maxwell sont données par

$$\vec{\nabla} \bullet \vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0} \quad (M1)$$

$$\vec{\nabla} \bullet \vec{B} = 0 \quad (M2)$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\dot{\vec{B}} \quad (M3)$$

$$c^2 \vec{\nabla} \times \vec{B} = \dot{\vec{E}} + \frac{\vec{j}}{\varepsilon_0} \quad (M4)$$

Le produit scalaire usuel est noté \bullet , le produit vectoriel \times et $\vec{\nabla}$ désigne

$$\vec{\nabla} = \begin{pmatrix} \partial_x \\ \partial_y \\ \partial_z \end{pmatrix}$$

Par conséquent,

$$\vec{\nabla} \bullet \vec{E} = \frac{\partial E_1}{\partial x} + \frac{\partial E_2}{\partial y} + \frac{\partial E_3}{\partial z}$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \begin{pmatrix} \frac{\partial B_3}{\partial y} - \frac{\partial B_2}{\partial z} \\ \frac{\partial B_1}{\partial z} - \frac{\partial B_3}{\partial x} \\ \frac{\partial B_2}{\partial x} - \frac{\partial B_1}{\partial y} \end{pmatrix}$$

Finalement, c est la vitesse de la lumière dans le vide

$$c = 299'792'458 \approx 3 \cdot 10^8 \text{ m/s}$$

et ε_0 est la constante dite de **permittivité diélectrique du vide**,

$$\varepsilon_0 = 8.85419 \cdot 10^{-12} \frac{\text{A} \cdot \text{s}}{\text{V} \cdot \text{m}}$$

On utilise aussi la constante

$$k = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \approx 9 \cdot 10^9 \frac{\text{N} \cdot \text{m}^2}{\text{C}^2}$$

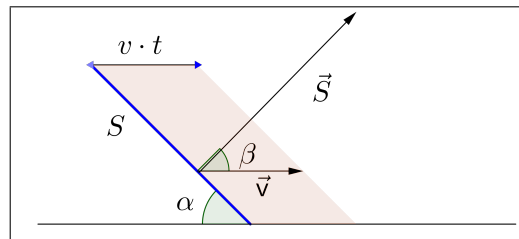


FIGURE 7. Flux

Ces valeurs sont valables pour des charges dans le vide. Si les charges ne sont pas dans le vide, la constante ε_0 doit être remplacée par la constante diélectrique ε du milieu qui les sépare. La constante ε vaut, par exemple,

- dans l'eau: $\varepsilon = 80\varepsilon_0$
- dans le verre $\varepsilon = 2$ à $5 \times \varepsilon_0$.

Le principe de conservation de la charge électrique s'énonce

$$\vec{\nabla} \bullet \vec{j} = -\dot{\rho}$$

Rappelons que la force subie par une charge est donnée par (force de Lorentz)

$$\vec{F} = q \left(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B} \right)$$

7. Interprétation des équations de Maxwell: électrostatique

Nous allons maintenant étudier le contenu physique des équations de Maxwell, en commençant par l'équation qui traduit le principe de conservation de la charge. Nous examinerons ensuite en détail la première équation de Maxwell qui concerne uniquement le champ électrique.

7.1. Conservation de la charge.

Commençons par interpréter la loi de conservation de la charge. Par la formule d'Ostrogradsky, on trouve

$$\dot{q} = \int_V \dot{\rho} dV = - \int_V \left(\vec{\nabla} \bullet \vec{j} \right) dV = - \int_{\partial V} \vec{j} \bullet d\vec{S}$$

où q représente la charge enfermée dans le volume V . En d'autres termes, la variation de la charge dans un volume est égale (au signe près) au flux du courant électrique à travers la surface entourant ce volume: q varie seulement si des charges entrent ou quittent V . Imaginons que q soit positive et augmente (des électrons quittent V). Alors, le flux du courant à travers la surface est négatif, puisque le sens \vec{j} est, par convention, opposé au déplacement des charges négatives.

8. Equation de Maxwell M1

Avec la formule d'Ostrogradsky, la première équation de Maxwell devient

$$\frac{q}{\varepsilon_0} = \int_{\Omega} \frac{\rho}{\varepsilon_0} dV = \int_V \left(\vec{\nabla} \bullet \vec{E} \right) dV = \int_{\partial\Omega} \vec{E} \bullet d\vec{S}$$

où q est la charge totale enfermée dans le volume Ω . En mots, **le flux du champ électrique à travers une surface fermée est égal, à une constante près, à la charge enfermée à l'intérieur de cette surface.** Ce résultat est dû à Gauss (1777-1855) et est connu sous le nom de théorème de Gauss.

Si V est une sphère de rayon r et si la densité de charge ρ est homogène, alors $\vec{E} \bullet d\vec{S}$ est constant et il vient

$$\frac{q}{\varepsilon_0} = E(\vec{r}) \int_{\partial V} dS = E(\vec{r}) 4\pi r^2 \Rightarrow E(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q}{r^2} \Rightarrow \vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q}{r^3} \vec{r}$$

C'est la loi de Coulomb pour une charge ponctuelle ou pour une charge sphérique homogène de rayon R avec $R \leq r$.

REMARQUE 8.1. Quelques remarques s'imposent.

- (1) Si plusieurs surfaces enferment la même quantité de charges, alors le flux total de \vec{E} à travers toutes ces surfaces sera le même et ceci quelle que soit la façon dont sont distribuées les charges à l'intérieur des surfaces.
- (2) Les charges situées en dehors d'une surface fermée n'ont aucune contribution au flux total de \vec{E} à travers elle.
- (3) Si une surface n'enferme aucune charge, le flux total de \vec{E} (créé exclusivement par des charges extérieures à S dans ce cas) sera nul à travers cette surface.
- (4) Si l'on change la distribution géométrique à l'intérieur d'une surface, on ne change par le résultat du flux total de \vec{E} , mais certainement la valeur locale de \vec{E} en un point P de la surface.

8.1. Potentiel électrique et tension électrique.

DÉFINITION 8.2. On définit le **potentiel électrique** dans le champ d'une charge q (ponctuelle ou sphérique homogène de rayon $R \leq r$) par

$$U(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{q}{r} \quad \text{unités: } 1 \text{ V (Volt)} = 1 \frac{\text{J}}{\text{C}}$$

et la **différence de potentiel** (ou **tension électrique**) entre deux points \vec{r}_A et \vec{r}_B par

$$U_{AB} = U(\vec{r}_A) - U(\vec{r}_B)$$

REMARQUE 8.3. Quelques remarques s'imposent à nouveau.

- (1) **La force de Coulomb est conservative** car

$$-\vec{\nabla}U = -\frac{q}{4\pi\epsilon_0} \begin{pmatrix} \partial_x(x^2 + y^2 + z^2)^{-\frac{1}{2}} \\ \partial_y(x^2 + y^2 + z^2)^{-\frac{1}{2}} \\ \partial_z(x^2 + y^2 + z^2)^{-\frac{1}{2}} \end{pmatrix} = -\frac{q}{4\pi\epsilon_0} \begin{pmatrix} -\frac{1}{2}2x(x^2 + y^2 + z^2)^{-\frac{3}{2}} \\ -\frac{1}{2}2y(x^2 + y^2 + z^2)^{-\frac{3}{2}} \\ -\frac{1}{2}2z(x^2 + y^2 + z^2)^{-\frac{3}{2}} \end{pmatrix} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{q}{r^3} \vec{r} = \vec{E}(\vec{r})$$

Nous verrons plus loin que ceci est vrai uniquement pour un champ électrique \vec{E} **statique**.

- (2) Pour un chemin quelconque $\mathcal{C}_{A \rightarrow B}$ reliant les points \vec{r}_A à \vec{r}_B , il vient

$$\int_{\mathcal{C}_{A \rightarrow B}} \vec{E} \bullet d\vec{l} = - \int_{\mathcal{C}_{A \rightarrow B}} (\vec{\nabla}U) \bullet d\vec{l} = - (U(\vec{r}_B) - U(\vec{r}_A)) = U(\vec{r}_A) - U(\vec{r}_B) = U_{AB}$$

- (3) Le vecteur \vec{E} donne le sens et la direction du mouvement des charges positives. De plus, comme pour tout champ de vecteur, les équipotentielles sont en tout point perpendiculaires au champ \vec{E} .
- (4) En particulier, remarquons que

$$U(\vec{r}_A) = \int_{\mathcal{C}_{A \rightarrow \infty}} \vec{E} \bullet d\vec{l}$$

où ∞ désigne un point à l'infini.

- (5) L'énergie potentielle d'une charge Q placée dans le champ \vec{E} est donnée par

$$\mathcal{E}_{pot\ ele Q}(\vec{r}_A) = Q \cdot U(\vec{r}_A)$$

Elle est égale au travail de la force électrique quand la charge Q va du point \vec{r}_A à l'infini. Notons q la charge qui engendre le champ \vec{E} . Si q et Q ont le même signe, ce travail est positif et l'énergie potentielle de Q est positive (il faut fournir un travail pour amener Q

de l'infini à \vec{r}_A car la force électrique est répulsive). En revanche, si q et Q sont de signes opposés, alors l'énergie potentielle est négative (il faut fournir un travail pour amener Q de \vec{r}_A à l'infini car la force électrique est attractive).

(6) Finalement, remarquons que

$$QU_{AB} = \int_{C_{A \rightarrow B}} Q \vec{E} \bullet d\vec{l} = -(\mathcal{E}_{pot\ ele\ Q\ B} - \mathcal{E}_{pot\ ele\ Q\ A}) = -\Delta \mathcal{E}_{pot\ ele\ Q}$$

Si Q est positive et que le déplacement se fait dans le sens du champ électrique \vec{E} (i.e. $\vec{E} \bullet d\vec{l} > 0$), l'énergie potentielle de Q diminue (il faut fournir du travail pour amener Q de B à A). Si Q est négative et que le déplacement se fait dans le sens du champ électrique \vec{E} , l'énergie potentielle de Q augmente (il faut fournir du travail pour amener Q de A à B).

8.2. Exemples.

Nous allons montrer maintenant comment la forme intégrale de la première équation de Maxwell (le théorème de Gauss) permet de calculer le potentiel engendré par des corps chargés de différentes formes.

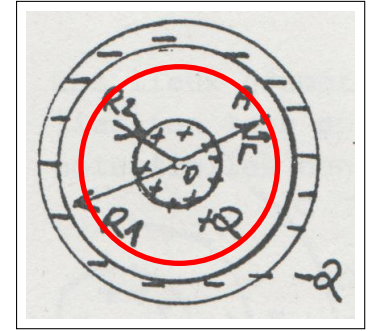
EXEMPLE 8.4. Considérons le cas de **deux sphères concentriques** métalliques comme sur la figure ci-dessous.

Le champ \vec{E} est isotrope. Imaginons une sphère intermédiaire (en rouge sur la figure). En vertu de la première équation de Maxwell, seule la charge positive compte pour le calcul du flux de \vec{E} à travers la surface rouge. Il vient

$$E(\vec{r})4\pi r^2 = \frac{Q}{\varepsilon_0} \Rightarrow \vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{Q}{r^3} \vec{r}$$

et

$$U_{+-} = \int_{R_2}^{R_1} \vec{E} \bullet d\vec{l} = \int_{R_2}^{R_1} \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{Q}{r^2} dr = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{Q}{r} \Big|_{R_2}^{R_1} = -\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0} \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right)$$



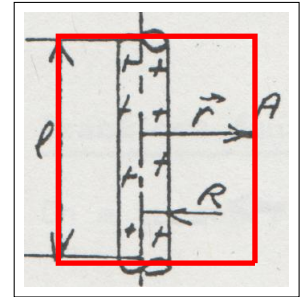
(Dessin: Collège de Candolle)

EXEMPLE 8.5. Considérons un fil droit (un cylindre) chargé infini de rayon R et de densité linéique de charge $\lambda = \frac{Q}{l}$ (unités: C/m). Imaginons un cylindre dont l'axe de symétrie est confondu avec le centre du fil (en rouge sur la figure) de rayon r et de hauteur l . En vertu de la première équation de Maxwell, nous trouvons que

$$\Phi = E(\vec{r}_A)2\pi r l = \frac{Q}{\varepsilon_0} \Rightarrow \vec{E}(\vec{r}_A) = \frac{1}{2\pi\varepsilon_0} \frac{Q}{l} \frac{1}{r_A} \frac{\vec{r}_A}{r_A} = \frac{1}{2\pi\varepsilon_0} \frac{\lambda}{r_A} \frac{\vec{r}_A}{r_A}$$

où nous avons noté $r_A = \|\vec{r}_A\|$. En effet, pour des raisons de symétrie, la direction du champ \vec{E} est orthogonale à l'axe du fil. Par conséquent, le flux à travers les deux disques du cylindre est nul. De ce qui précède, il suit que

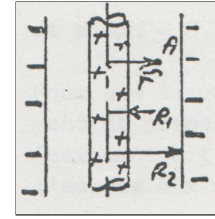
$$U(\vec{r}_A) = -\frac{1}{2\pi\varepsilon_0} \lambda \ln(r_A) \text{ car } \vec{E}(\vec{r}_A) = -(\vec{\nabla} U)(\vec{r}_A)$$



(Dessin: Collège de Candolle)

EXEMPLE 8.6.

Considérons deux cylindres (de hauteur infinie) de rayon R_1 et R_2 comme sur le dessin ci-contre. Pour des raisons de symétrie, le champ électrique est orthogonal à l'axe. En vertu de la première loi de Maxwell, seules les charges à l'intérieur d'une surface contribuent au flux du champ électrique à travers cette surface. Par conséquent, le champ en \vec{r}_A est le même que pour un fil chargé infini



(Dessin: Collège de Candolle)

$$\vec{E}(\vec{r}_A) = \frac{1}{2\pi\epsilon_0} \frac{\lambda}{r_A} \frac{\vec{r}_A}{r_A}$$

où $r_A = \|\vec{r}_A\|$. Par ailleurs, la tension électrique entre les deux cylindres est donnée par

$$U_{+-} = -\frac{1}{2\pi\epsilon_0} \ln(R_1) - \left(-\frac{1}{2\pi\epsilon_0} \ln(R_2) \right) = \frac{1}{2\pi\epsilon_0} \ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right)$$

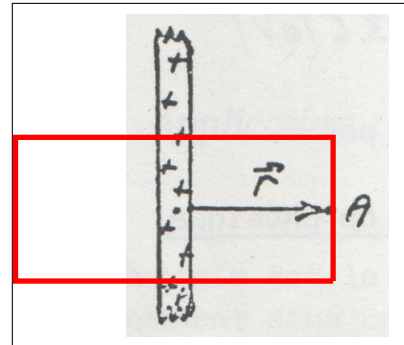
EXEMPLE 8.7. Considérons une plaque infinie chargée de densité surfacique de charge $\sigma = \frac{Q}{S}$ (unités: C/m²). Pour des raisons de symétrie, le champ est perpendiculaire à la plaque. Imaginons un cylindre dont l'axe de symétrie est perpendiculaire à la plaque (en rouge sur la figure) de hauteur $2r_A$ et de rayon R (où $r_A = \|\vec{r}_A\|$).

En vertu de la première équation de Maxwell, nous trouvons que

$$\Phi = 2E(\vec{r}_A)\pi R^2 = \frac{Q}{\epsilon_0} \Rightarrow \vec{E}(\vec{r}_A) = \frac{1}{\epsilon_0} \frac{Q}{2\pi R^2} \frac{\vec{r}_A}{r_A} = \frac{1}{2\epsilon_0} \sigma \frac{\vec{r}_A}{r_A}$$

En effet, la direction du champ \vec{E} étant orthogonale à la plaque, le flux à travers le bord du cylindre perpendiculaire à la plaque est nul. De ce qui précède, il suit que

$$U(\vec{r}_A) = -\frac{1}{2\epsilon_0} \sigma r_A$$



(Dessin: Collège de Candolle)

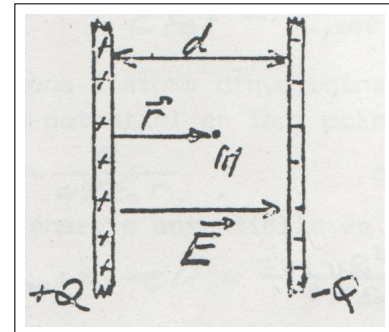
EXEMPLE 8.8. Considérons deux plaques infinies parallèles chargées de densité surfacique de charge $\sigma = \frac{Q}{S}$ (unités: C/m²).

Comme nous l'avons vu ci-dessus, le champ dû à une plaque ne dépend pas de l'éloignement. Entre les plaques, les champs dus aux charges positives et négatives s'ajoutent, en dehors, ils s'annulent:

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{\epsilon_0} \sigma \frac{\vec{r}}{r} \text{ entre les plaques et } \vec{E}(\vec{r}) = \vec{0} \text{ en dehors}$$

où $r = \|\vec{r}\|$. Par conséquent,

$$U_{+-} = U(0) - U(d) = \frac{\sigma d}{\epsilon_0} \text{ et } E = \|\vec{E}\| = \frac{U_{+-}}{d}$$



(Dessin: Collège de Candolle)

8.3. Condensateurs et capacité.

Dans les exemples qui précèdent, on remarque que la tension U_{+-} est proportionnelle à la charge. On définit la **capacité** comme

$$C = \frac{Q}{|U|} \geq 0 \quad \text{unités: } \frac{\text{C}}{\text{V}} = \text{F (Farad)}$$

En pratique, on utilise les unités: $\mu\text{F} = 10^{-6} \text{ F}$, $\text{nF} = 10^{-9} \text{ F}$, $\text{pF} = 10^{-12} \text{ F}$, etc.

La capacité C dépend uniquement de la géométrie du corps et de sa constitution. Par exemple, un système de deux plaques métalliques séparées par de l'air n'aura pas la même capacité que le même système mais avec deux plaques séparées par un matériau diélectrique. Dans ce cas, dans le calcul du champ, il faut remplacer la constante ε_0 , la permittivité diélectrique du vide, par

$$\varepsilon = \varepsilon_r \cdot \varepsilon_0$$

la permittivité diélectrique du matériau (ε_r est la **permittivité diélectrique relative** du matériau).

EXEMPLE 8.9. Donnons quelques exemples de capacités.

- (1) Capacité d'une sphère métallique de rayon R par rapport à la matière environnante suffisamment éloignée:

$$C = \frac{Q}{|\Delta U|} = \frac{Q}{\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R}} = 4\pi\varepsilon_0 R$$

- (2) Capacité de deux sphères concentriques de charges $+Q$ et $-Q$:

$$C = \frac{Q}{|\Delta U|} = 4\pi\varepsilon_0 \frac{R_1 R_2}{R_2 - R_1}$$

- (3) Capacité de deux cylindres concentriques de charges $+Q$ et $-Q$ et de longueur l :

$$C = \frac{Q}{|\Delta U|} = \frac{2\pi\varepsilon_0 l}{\ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right)}$$

- (4) Capacité de deux plaques parallèles de surface S de charges $+Q$ et $-Q$ et à distance d l'une de l'autre:

$$C = \varepsilon_0 \frac{S}{d}$$

On peut associer des condensateurs pour en former un nouveau. Par exemple en série (voir figure 8, à gauche). Dans ce cas, chaque condensateur porte la même charge puisque l'armature négative de l'un est reliée à l'armature positive du suivant. La différence totale de potentiel vaut:

$$U_{tot} = U_1 + U_2 + \dots + U_n = \frac{Q}{C_1} + \frac{Q}{C_2} + \dots + \frac{Q}{C_n} = Q \left(\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \dots + \frac{1}{C_n} \right)$$

Ainsi, des condensateurs en série sont équivalents à un condensateur de capacité $C_{equiv\ ser}$ donnée par

$$\frac{1}{C_{equiv\ ser}} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \dots + \frac{1}{C_n}$$

On peut aussi associer des condensateurs en parallèle (voir figure 8, à droite). Dans ce cas

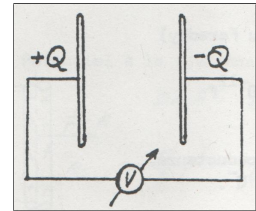
$$Q_{tot} = Q_1 + Q_2 + \dots + Q_n = C_1 U + C_2 U + \dots + C_n U = U (C_1 + C_2 + \dots + C_n)$$

Ainsi, des condensateurs en parallèle sont équivalents à un condensateur de capacité $C_{equiv \parallel}$ donnée par

$$C_{equiv \parallel} = C_1 + C_2 + \dots + C_n$$

REMARQUE 8.10. Remarquons que dans chaque cas, la capacité croît avec la permittivité diélectrique ε si on place un diélectrique entre les armatures métalliques. Considérons par exemple un condensateur constitué de deux plaques parallèles. On peut mesurer la tension électrique avec un voltmètre (voir figure ci-contre). On constate expérimentalement que la tension décroît si la distance entre les plaques diminue. Il faut effectuer un travail pour éloigner les plaques. Quand la distance d diminue, la capacité augmente. Par ailleurs, si l'on introduit un diélectrique de constante ε entre les plaques, la capacité augmente et la tension diminue. En effet,

$$\varepsilon > \varepsilon_0 \Rightarrow C = \varepsilon \frac{S}{d} \nearrow \Rightarrow U = \frac{Q}{C} \searrow$$



(Dessin: Collège de Candolle)

Le premier condensateur employé a été la bouteille de Leyde (ville des Pays-Bas) construit en 1745 par Ewald von Kleist. Le diélectrique est le verre d'une bouteille et les armatures sont du papier d'étain.

Le condensateur est une pièce maîtresse de l'électronique et sa taille a fortement diminué. On peut fabriquer un condensateur en superposant des feuilles métalliques et des couches de diélectrique (par exemple: papier paraffiné ou bakélisé, titanate de baryum BaTiO_3 , $\varepsilon_r = \frac{\varepsilon}{\varepsilon_0} \approx 10^3$) et en branchant les feuilles en parallèle (voir figure 9).

Il existe aussi des condensateurs électrolytiques. Le diélectrique est constitué par une fine couche d'oxyde isolant qui se forme lors de la première mise sous tension. Cela impose une polarité fixe aux bornes du condensateur qui ne peut être inversé. La couche de diélectrique formée étant très fine (d petit), la capacité est grande. Comme

$$Q = CU ,$$

une grande capacité permet de stocker beaucoup de charge avec une faible tension.

8.4. Énergie d'un conducteur chargé et énergie du champ électrique.

Pour apporter une charge supplémentaire sur un conducteur, il faut effectuer un travail pour vaincre la répulsion due aux charges déjà présentes. Ce travail produit une augmentation de

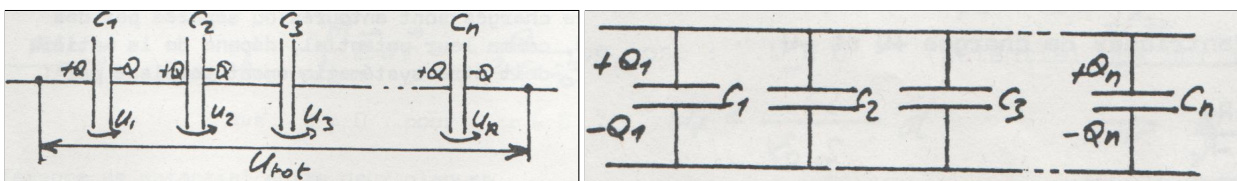


FIGURE 8. Association de condensateurs: en série (à gauche) et en parallèle (à droite). (Dessin: Collège de Candolle.)

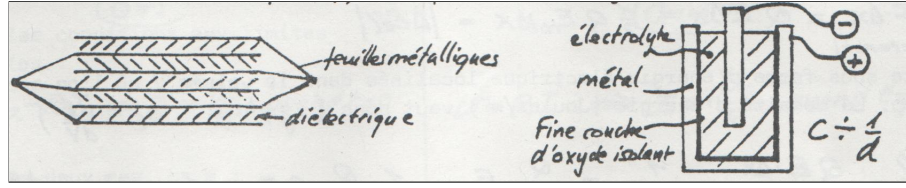


FIGURE 9. Réalisation pratique d'un condensateur.

l'énergie du conducteur. Considérons par exemple un conducteur de capacité C (par rapport à la matière environnante supposée suffisamment éloignée) portant une charge Q . Son potentiel vaut

$$U = \frac{Q}{C}$$

Si l'on ajoute une charge infinitésimale dq au conducteur en l'amenant du lieu où $U = 0$, alors le travail effectué est

$$dT = U dq = \frac{q}{C} dq$$

L'augmentation totale d'énergie du conducteur quand la charge passe de 0 à la valeur Q vaut:

$$\mathcal{E}_{ele} = \int_0^Q dT = \int_0^Q \frac{q}{C} dq = \frac{1}{C} \frac{q^2}{2} \Big|_0^Q = \frac{1}{2C} Q^2 = \frac{1}{2} CU^2 \Rightarrow \boxed{\mathcal{E}_{ele} = \frac{1}{2} CU^2}$$

Cette expression est valable quelle que soit la forme du conducteur chargé.

D'après ce que nous avons vu plus haut, l'énergie potentielle d'une charge q (dont la position est notée \vec{r}) dans le champ électrique créé par une charge q_i (dont la position est notée \vec{r}_i) vaut

$$\mathcal{E}_{pot ele} = qU(\vec{r} - \vec{r}_i) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{qq_i}{\|\vec{r} - \vec{r}_i\|}$$

L'énergie de la charge q dans le champ créé par un ensemble de N charges q_i est donnée par

$$\mathcal{E}_{pot ele} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i=1}^N \frac{qq_i}{\|\vec{r} - \vec{r}_i\|}$$

Pour l'énergie totale du système, nous avons donc

$$\mathcal{E}_{pot ele} = \frac{1}{2} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{1 \leq i \neq j \leq N} \frac{qq_i}{\|\vec{r} - \vec{r}_i\|}$$

Dans le cas d'une densité de charge ρ dans un domaine Ω , nous trouvons

$$\mathcal{E}_{pot ele} = \frac{1}{2} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{\Omega} \int_{\Omega} \frac{\rho(\vec{r})\rho(\vec{r}')}{\|\vec{r} - \vec{r}'\|} dV dV'$$

En vertu de la première équation de Maxwell

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \quad \vec{E} = -\vec{\nabla} U \quad \Rightarrow \quad \rho = \epsilon_0 \vec{\nabla} \cdot (-\vec{\nabla} U)$$

De plus, rappelons que

$$U(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{\Omega} \frac{\rho(\vec{r}') dV'}{\|\vec{r} - \vec{r}'\|}$$

Par conséquent, nous trouvons que

$$\mathcal{E}_{pot\ ele} = \frac{1}{2} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{\Omega} \int_{\Omega} \frac{\rho(\vec{r})\rho(\vec{r}')}{\|\vec{r}-\vec{r}'\|} dV dV' = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \rho(\vec{r})U(\vec{r}) dV = -\frac{\epsilon_0}{2} \int_{\Omega} \vec{\nabla} \bullet (\vec{\nabla}U) U dV$$

Or

$$\vec{\nabla} \bullet (\phi \vec{\nabla} \phi) = \partial_x (\phi (\partial_x \phi)) + \partial_y (\phi (\partial_y \phi)) + \partial_z (\phi (\partial_z \phi))$$

De plus,

$$\partial_x (\phi (\partial_x \phi)) = (\partial_x \phi)^2 + \phi \partial_x^2 \phi$$

où $\partial_x^2 \phi$ désigne la deuxième dérivée de ϕ par rapport à x . Il suit que

$$\vec{\nabla} \bullet (\phi \vec{\nabla} \phi) = (\partial_x \phi)^2 + \phi \partial_x^2 \phi + (\partial_y \phi)^2 + \phi \partial_y^2 \phi + (\partial_z \phi)^2 + \phi \partial_z^2 \phi = (\vec{\nabla} \phi) \bullet (\vec{\nabla} \phi) + \Delta \phi$$

où

$$\Delta \phi = (\partial_x^2 + \partial_y^2 + \partial_z^2) \phi = \vec{\nabla} \bullet (\vec{\nabla} \phi)$$

L'opérateur $\Delta = \partial_x^2 + \partial_y^2 + \partial_z^2$ est appelé le **laplacien**. Par conséquent, nous trouvons que

$$-\vec{\nabla} \bullet (\vec{\nabla} \phi) = -\Delta \phi = (\vec{\nabla} \phi) \bullet (\vec{\nabla} \phi) - \vec{\nabla} \bullet (\phi \vec{\nabla} \phi)$$

Avec ces formules, nous trouvons que

$$\mathcal{E}_{pot\ ele} = -\frac{\epsilon_0}{2} \int_{\Omega} \vec{\nabla} \bullet (\vec{\nabla}U) U dV = \frac{\epsilon_0}{2} \int_{\Omega} ((\vec{\nabla}U) \bullet (\vec{\nabla}U) - \vec{\nabla} \bullet (U (\vec{\nabla}U))) dV$$

En vertu de la formule d'Ostrogradsky,

$$\int_{\Omega} \vec{\nabla} \bullet (U (\vec{\nabla}U)) dV = \int_{\partial\Omega} U (\vec{\nabla}U) \bullet d\vec{S} = 0$$

En effet, supposons que toutes les charges sont contenues dans une boule $B(\vec{r}_0, r)$ de rayon r centrée en \vec{r}_0 . Alors, il suffit de considérer un domaine $\Omega = B(\vec{r}_0, R)$ avec $R \gg r$. Ainsi, sur le bord $\partial\Omega$ de Ω , $U \approx 0$. Par conséquent, nous trouvons que

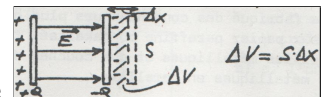
$$\mathcal{E}_{pot\ ele} = \frac{\epsilon_0}{2} \int_{\Omega} (\vec{\nabla}U) \bullet (\vec{\nabla}U) dV \stackrel{\vec{E} = -\vec{\nabla}U}{=} \frac{\epsilon_0}{2} \int_{\Omega} \vec{E} \bullet \vec{E} dV \Rightarrow \boxed{\mathcal{E}_{pot\ ele} = \frac{\epsilon_0}{2} \int_{\Omega} \|\vec{E}\|^2 dV}$$

EXEMPLE 8.11. Considérons, à titre d'exemple, un condensateur plan chargé. Entre ses armatures qui délimitent un certain domaine Ω règne un champ électrique homogène

$$E = \frac{Q}{\epsilon_0 S}$$

Ce champ ne dépend pas de la distance d entre les plaques. On peut donc, en écartant celles-ci, créer un champ dans un volume supplémentaire. Cette création de champ nécessite un certain travail puisque les plaques s'attirent (charges $+Q$ et $-Q$). Par exemple, la plaque de droite subit une force parce qu'elle est plongée dans le champ dû à la plaque de gauche, qui vaut

$$E = \frac{Q}{2\epsilon_0 S}$$



(Dessin: Collège de Candolle)

Chaque plaque produit la moitié du champ total. Le travail vaut donc

$$A = F \Delta x = QE_{gauche} \Delta x = \frac{1}{2} EQ \Delta x = |\Delta \mathcal{E}_{ele}|$$

La variation d'énergie par unité de volume ($\frac{\text{J}}{\text{m}^3}$) est donnée par

$$\frac{d\mathcal{E}_{ele}}{dV} = \frac{|\Delta \mathcal{E}_{ele}|}{\Delta V} = \frac{\frac{1}{2} EQ \Delta x}{S \Delta x} = \frac{Q}{2S} E = \frac{1}{2} \varepsilon_0 \frac{Q}{\varepsilon_0 S} E = \frac{1}{2} \varepsilon_0 E^2$$

Par conséquent, l'énergie électrique contenue dans le domaine Ω délimité par les plaques du condensateur vaut

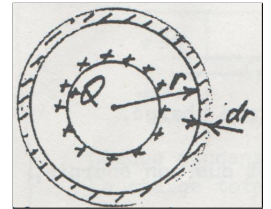
$$\mathcal{E}_{ele} = \frac{\varepsilon_0}{2} \int_{\Omega} \frac{d\mathcal{E}_{ele}}{dV} dV = \frac{\varepsilon_0}{2} \int_{\Omega} E^2 dV$$

EXEMPLE 8.12. Calculons, à titre d'exemple, l'énergie contenue dans tout l'espace qui entoure un conducteur sphérique de rayon R et qui porte une charge Q . Le champ électrique dépend uniquement de $r = \|\vec{r}\|$. On choisit comme élément de volume dV le volume d'une couche sphérique de rayon r et d'épaisseur dr :

$$dV = 4\pi r^2 dr$$

Ainsi,

$$\mathcal{E}_{pot\ ele} = \frac{\varepsilon_0}{2} \int_R^{\infty} \left(\frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{Q}{r^2} \right)^2 4\pi r^2 dr = \frac{Q^2}{4\pi\varepsilon_0} \frac{1}{2} \int_R^{\infty} \frac{1}{r^2} dr = \frac{Q^2}{4\pi\varepsilon_0} \frac{1}{2R}$$



(Dessin: Collège de Candolle)

Rappelons que pour une boule de rayon R ,

$$C = 4\pi\varepsilon_0 R$$

Par conséquent,

$$\mathcal{E}_{pot\ ele} = \frac{Q^2}{4\pi\varepsilon_0} \frac{1}{2R} = \frac{1}{2} Q \frac{Q}{C} = \frac{1}{2} CU \cdot U = \frac{1}{2} CU^2$$

REMARQUE 8.13. Remarquons que si $R = 0$, la formule ci-dessus donne une énergie infinie ! Notre théorie de l'électricité n'est donc pas compatible avec des charges ponctuelles. Mais existe-t-il des charges ponctuelles ? Les expériences dans les anneaux de collisions e^+e^- donne $r_{elec} < 10^{-16}$ cm. Par ailleurs $r_{proton} \approx 10^{-13}$ cm. En supposant que l'électron est une sphère conductrice, d'après la théorie de la relativité restreinte d'Einstein, nous trouvons

$$E = \frac{1}{2} m_{elec} c^2 \Rightarrow \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0} \frac{1}{2r_{elec}} = \frac{1}{2} m_{elec} c^2$$

$$\Rightarrow r_{electron} = \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 m_{elec} c^2} \approx 9 \cdot 10^9 \frac{(1.6 \cdot 10^{-19})^2}{9.1 \cdot 10^{-31} (3 \cdot 10^8)^2} \approx 2.8 \cdot 10^{-15} \text{ m}$$

9. Interprétation des équations de Maxwell: électromagnétisme

Nous allons maintenant interpréter les trois autres équations de Maxwell. La deuxième ne concerne que le champ magnétique. La troisième et la quatrième décrivent les relations entre champ électrique et magnétique.

Historiquement, l'étude des champs magnétiques a été faite empiriquement; les propriétés des aimants naturels (pierre de magnésie) ou celle des aimants artificiels (fer, acier) entraînèrent l'étude du champ magnétique pour lui-même, comme un phénomène indépendant. En 1820, Ørsted fit des expériences fondamentales qui montrèrent qu'un fil parcouru par un courant produit des effets identiques à ceux des aimants, soit sur d'autres aimants, soit sur d'autres fils parcourus par des courants. Dès lors, les phénomènes magnétiques trouvèrent des explications et des lois purent être exprimées (Ampère, Lorentz, Laplace, Faraday, Lenz, Maxwell).

Ce que nous appelons le champ magnétique est en fait un effet relativiste du champ électrique. Un conducteur parcouru par un courant électrique est neutre, mais dans n'importe quel référentiel en mouvement relativement au conducteur, celui-ci apparaît chargé. Par conséquent, un conducteur parcouru par courant exerce une force sur des charges en mouvement relativement au conducteur: c'est la force de Lorentz

$$\vec{F} = q\vec{v} \times \vec{B}$$

10. Equation de Maxwell M2

En appliquant la formule d'Ostrogradsky à la deuxième équation de Maxwell, on déduit que le flux du champ magnétique à travers n'importe quelle surface fermée est nul. De plus, il n'existe pas de monopôles magnétiques ou, en d'autres termes, il n'existe pas de source du champ magnétique.

En effet, de la deuxième équation de Maxwell, il suit en vertu de la formule d'Ostrogradsky,

$$0 = \int_V \vec{\nabla} \cdot \vec{B} dV = \int_{\partial V} \vec{B} \cdot d\vec{S}$$

11. Equation de Maxwell M4

Si le champ électrique est constant, la quatrième équation de Maxwell devient

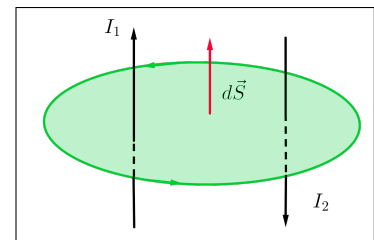
$$c^2 \vec{\nabla} \times \vec{B} = \frac{1}{\varepsilon_0} \vec{j} + \dot{\vec{E}} \stackrel{\dot{\vec{E}}=0}{\Rightarrow} \boxed{\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \vec{j}} \text{ où } \mu_0 = \frac{1}{c^2 \varepsilon_0} = 4\pi \cdot 10^{-7} \frac{\text{V} \cdot \text{s}}{\text{A} \cdot \text{m}}$$

est la constante d'induction, également appelée la constante de perméabilité magnétique du vide. En vertu de la formule de Stokes,

$$\int_{\partial S} \vec{B} \cdot d\vec{l} = \int_S (\vec{\nabla} \times \vec{B}) \cdot d\vec{S} = \mu_0 \int_S \vec{j} \cdot d\vec{S} = \mu_0 (I_1 - I_2)$$

c'est-à-dire

$$\boxed{\int_{\partial S} \vec{B} \cdot d\vec{l} = \sum_{\text{algébrique}} I_j}$$



C'est le théorème d'Ampère.

11.1. Loi de Biot-Savart.

En vertu de la deuxième équation de Maxwell il vient

$$\vec{\nabla} \bullet \vec{B} = 0 \Rightarrow \exists \vec{A} \text{ tel que } \vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}$$

Le champ vectoriel \vec{A} est appelé le potentiel vecteur du champ magnétique \vec{B} . Remarquons qu'il n'est pas unique puisque

$$\vec{\nabla} \times (\vec{A} + \vec{\nabla} \phi) = \vec{\nabla} \times \vec{A} + \underbrace{\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \phi)}_{= \vec{0}} = \vec{0} \quad \forall \phi$$

Par conséquent, en vertu de la quatrième équation de Maxwell, il suit si $\dot{\vec{E}} = \vec{0}$, alors

$$\dot{\vec{E}} = 0 \Rightarrow \frac{\vec{j}}{\varepsilon_0} = c^2 \vec{\nabla} \times \vec{B} = c^2 \vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{A}) = c^2 (\vec{\nabla} \bullet (\vec{\nabla} \times \vec{A}) - \Delta \vec{A})$$

où

$$\Delta = \partial_x^2 + \partial_y^2 + \partial_z^2$$

est le Laplacien. Il est toujours possible de remplacer \vec{A} par $\vec{A} + \vec{\nabla} \phi$ sans changer \vec{B} et de choisir la fonction ϕ telle que

$$\vec{0} = \vec{\nabla} \bullet (\vec{A} + \vec{\nabla} \phi) = \vec{\nabla} \bullet \vec{A} - \Delta \phi \Rightarrow \Delta \phi = -\vec{\nabla} \bullet \vec{A}$$

Par conséquent, pour trouver \vec{A} il faut résoudre les équations suivantes

$$\Delta A_k = -\mu_0 j_k \text{ où } \mu_0 = \frac{1}{c^2 \varepsilon_0} = 4\pi \cdot 10^{-7}$$

est la constante de perméabilité magnétique du vide. La solution est donnée par

$$\vec{A}(\vec{r}_1) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \frac{\vec{j}(\vec{r})}{\|\vec{r}_1 - \vec{r}\|} dV$$

Si on a un fil avec un courant

$$I = \vec{j} \bullet d\vec{S} \Rightarrow \vec{j} dV = I d\vec{l} \Rightarrow \vec{A}(\vec{r}_1) = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_{\text{fil}} \frac{1}{\|\vec{r}_1 - \vec{r}\|} d\vec{l}$$

et le champ magnétique \vec{B} est donné par

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_{\text{fil}} \frac{d\vec{l} \times (\vec{r}_1 - \vec{r})}{\|\vec{r}_1 - \vec{r}\|^3}$$

C'est la loi de Biot-Savart.

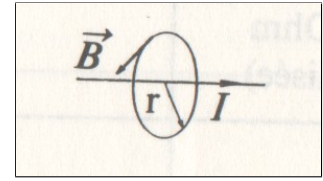
11.2. Champ magnétique créé par un courant rectiligne infini.

Imaginons un fil rectiligne infini traversé par un courant constant et une surface S qui est un disque de rayon r perpendiculaire au fil. En vertu de la loi de Biot-Savart, nous savons que le champ magnétique est tangent au cercle. De plus, en vertu du théorème d'Ampère,

$$B \cdot 2\pi r = \int_{\partial S} \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 I$$

c'est-à-dire

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}$$

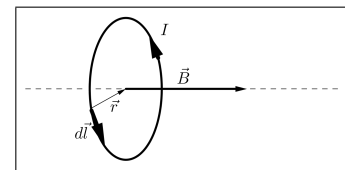


(Dessin: table CRM)

11.3. Champ magnétique créé par une spire unique.

En appliquant la loi de Biot-Savart, on trouve que le champ magnétique au centre de la spire parcourue par un courant I vaut

$$\|\vec{B}\| = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_{\odot} \frac{d\vec{l} \times \vec{r}}{r^3} = \frac{\mu_0 I}{4\pi r^2} 2\pi r = \mu_0 \frac{I}{2r}$$



11.4. Champ magnétique créé par une bobine longue.

On considère un solénoïde long de longueur l , c'est-à-dire un fil enroulé autour d'un cylindre (une bobine). On trouve que

$$\int_C^D \vec{B} \cdot d\vec{l} = 0$$

si \overline{BC} est très grand. Par ailleurs, si la bobine est longue (*i.e.* l est grand), alors

$$\int_B^C \vec{B} \cdot d\vec{l} = - \int_D^A \vec{B} \cdot d\vec{l}$$

Par conséquent,

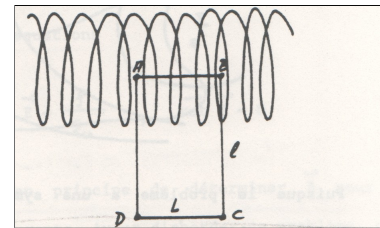
$$\int_{ABCD\odot} \vec{B} \cdot d\vec{l} = \int_A^B \vec{B} \cdot d\vec{l} = BL$$

et en vertu du théorème d'Ampère,

$$BL = \int_{ABCD\odot} \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 \int_{S_{ABCD}} \vec{j} \cdot d\vec{S} = \mu_0 \frac{n}{l} LI$$

où $\frac{n}{l}$ est le nombre de tours par mètre. Il suit que le champ magnétique au centre de la bobine vaut

$$B = \mu_0 \frac{nI}{l}$$



(Dessin: école de physique UNIGE)

12. Force de Laplace

Si les charges en mouvement sont les électrons d'un courant dans un fil, leur vitesse est très lente. La force de Lorentz a beau être infime sur chaque électron, elle développe néanmoins un effet d'ensemble très important par suite du très grand nombre d'électrons en cause.



(Dessin: Collège de Candolle)

En régime stationnaire,

$$I = \frac{dQ}{dt} \Rightarrow dQ = I dt \text{ et } d\vec{F} = dQ (\vec{v} \times \vec{B}) = I dt (\vec{v} \times \vec{B}) \stackrel{\vec{v} = \frac{d\vec{l}}{dt}}{=} I (d\vec{l} \times \vec{B})$$

et pour un fil rectiligne de longueur l ,

$$\boxed{\vec{F} = I (\vec{l} \times \vec{B})}$$

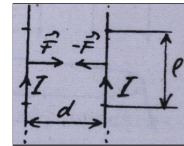
C'est la force de Laplace. La plupart des applications de l'électricité qui font intervenir des forces reposent sur cette relation.

REMARQUE 12.1. Comme la force de Lorentz ne travaille pas, l'intensité du courant n'est pas modifiée par le champ où se trouve le fil.

12.1. Définition de l'Ampère.

L'expérience de la balance de courant permet de définir l'Ampère à partir des trois autres unités fondamentales, soit le m, le kg et la s. Considérons deux fils rectilignes infinis parallèles séparés par une distance $d = 1$ m. Alors (voir figure ci-contre),

$$F = IlB = Il \frac{\mu_0 I}{2\pi d} = \mu_0 \frac{I^2 l}{2\pi d}$$



(Dessin: Collège de Candolle)

La définition officielle de l'Ampère est donnée par le BIPM⁽¹⁾:

L'ampère est l'intensité d'un courant constant qui, maintenu dans deux conducteurs parallèles, rectilignes, de longueur infinie, de section circulaire négligeable et placés à une distance de 1 mètre l'un de l'autre dans le vide, produirait entre ces conducteurs une force égale à $2 \cdot 10^{-7}$ newton par mètre de longueur.

13. Equation de Maxwell M3

En appliquant la formule de Stokes à la troisième équation de Maxwell, on obtient

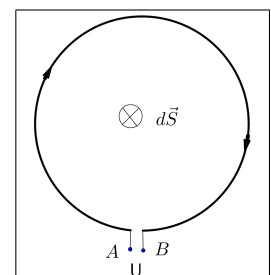
$$-\dot{\Phi} = -\frac{d}{dt} \int_S \vec{B} \bullet d\vec{S} = -\int_S \dot{\vec{B}} \bullet d\vec{S} = \int_S (\vec{\nabla} \times \vec{E}) \bullet d\vec{S} = \int_{\partial S} \vec{E} \bullet d\vec{l}$$

où Φ est le flux magnétique à travers la surface S .

Imaginons une boucle de fil sur une table reliée à un voltmètre. Alors, la tension électrique U_{AB} mesurée par le voltmètre est donnée par

$$-\dot{\Phi} = -\frac{d}{dt} \int_S \vec{B} \bullet d\vec{S} = \int_{A \cap B} \vec{E} \bullet d\vec{l} = U_{ind} \Rightarrow \boxed{U_{ind} = -\dot{\Phi}}$$

C'est le principe d'induction: un champ magnétique variable induit une tension électrique égale, au signe près, à la variation du flux magnétique. Le phénomène d'induction a été découvert indépendamment par Faraday et Henry. Il est à la base de nombreux dispositifs actuellement utilisés: générateurs électriques, transformateurs, etc.



¹Bureau International des Poids et Mesures, <http://www.bipm.org>

Pour déterminer le sens du courant induit, il faut raisonner comme suit. Imaginons un champ magnétique homogène vertical

$$\vec{B}(t) = (0, 0, -B(t)) \Rightarrow \dot{\vec{B}}(t) = (0, 0, -\dot{B}(t))$$

et supposons que S soit le disque

$$S = \left\{ (x, y, z) \mid z = 0 \text{ et } x^2 + y^2 < R^2 \right\}$$

dont nous choisissons l'orientation: $d\vec{S} = \otimes$ (ainsi, $\vec{B} \bullet d\vec{S} > 0$). Alors,

$$-\int_S \dot{\vec{B}} \bullet d\vec{S} = -\dot{B}(t)\pi r^2 = \int_{\odot \partial S} \vec{E} \bullet d\vec{l}$$

$$d\vec{S} = \otimes \Rightarrow \int_{\odot}$$

Par conséquent, si B augmente (*i.e.* $\dot{B} > 0$), le champ \vec{E} le long du fil tourne dans le sens trigonométrique \odot et le courant, qui indique le débit des charges positives, tourne également dans le sens trigonométrique \odot ⁽²⁾. Par conséquent, le champ magnétique créé par le courant induit rentre dans le plan $\vec{B}_{ind} = \odot$ et s'oppose à la variation de flux magnétique.

Toutes les situations sont résumées dans le tableau ci-contre (en haut pour le choix $d\vec{S} = \otimes$ et en bas pour le choix $d\vec{S} = \odot$). Nous constatons que le champ magnétique créé par le courant induit s'oppose à la variation du flux inducteur. Cela revient à dire que **tout phénomène d'induction s'oppose à sa cause**. C'est la loi de Lenz. Remarquons que le contraire serait absurde, car une petite variation de flux impliquerait la création d'un flux infini !

\vec{B}	$d\vec{S}$	$\ \vec{B}\ $	$-\dot{\Phi}$	\vec{I}	\vec{B}_{ind}
\otimes	\otimes	\nearrow	$-$	\odot	\odot
\otimes	\otimes	\searrow	$+$	\odot	\otimes
\odot	\otimes	\nearrow	$+$	\odot	\otimes
\odot	\otimes	\searrow	$-$	\odot	\odot

$$d\vec{S} = \odot \Rightarrow \int_{\odot}$$

\vec{B}	$d\vec{S}$	$\ \vec{B}\ $	$-\dot{\Phi}$	\vec{I}	\vec{B}_{ind}
\otimes	\odot	\nearrow	$+$	\odot	\odot
\otimes	\odot	\searrow	$-$	\odot	\otimes
\odot	\odot	\nearrow	$-$	\odot	\otimes
\odot	\odot	\searrow	$+$	\odot	\odot

REMARQUE 13.1. Le fait que

$$\int_{\odot} \vec{E} \bullet d\vec{l} \neq 0$$

quand le flux magnétique n'est pas constant, montre que \vec{E} n'est pas conservatif, c'est-à-dire qu'il n'est pas le gradient d'un potentiel. Par conséquent, la tension induite n'est pas une différence de potentiel. Au lieu de tension induite, on utilise parfois la terminologie "force électro-motrice". La boucle représentée plus haut agit comme un générateur. Par conséquent, la tension U_{AB} est positive quand le courant induit tourne dans le sens trigonométrique \odot et négative quand le courant induit tourne dans le sens horaire \odot . Il suit que

$$\begin{cases} U_{AB} = \dot{\Phi} \text{ si } d\vec{S} = \otimes \\ U_{AB} = -\dot{\Phi} \text{ si } d\vec{S} = \odot \end{cases}$$

13.1. Les courants de Foucault.

Tout corps conducteur (métal) soumis à un flux magnétique variable est le siège de courants induits. La conduction n'étant pas parfaite (sauf dans les supraconducteurs), les courants créent une agitation thermique des atomes du conducteur (effet Joule). De l'énergie électrique est transformée en énergie thermique. C'est en général, dans un appareil à induction, une cause de perte

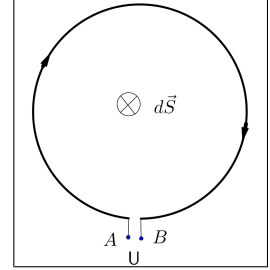
²les électrons, qui ont une charge négative, tournent dans le sens horaire \odot

d'énergie (par exemple, échauffement des transformateurs). Pour diminuer les courants induits dans les noyaux de fer des enroulements, on découpe le métal en fines lamelles couvertes d'isolants. Application: freinage par courants de Foucault.

13.2. Auto-induction.

Reprenons l'exemple d'une boucle de fil. Supposons qu'elle soit parcourue par un courant I tournant dans le sens horaire \odot et adoptons la convention

$$\begin{cases} I > 0 \text{ si } I \odot \\ I < 0 \text{ si } I \ominus \end{cases}$$



Le courant crée un champ magnétique perpendiculaire au plan de la boucle dont le sens est donné par

$$\begin{cases} I \odot \Rightarrow \vec{B} = \otimes \\ I \ominus \Rightarrow \vec{B} = \odot \end{cases}$$

et ce champ magnétique est proportionnel à I . De plus, le flux magnétique est proportionnel au champ magnétique et donc également au courant. Le facteur de proportionnalité est appelé le coefficient d'auto-induction et se note L :

$$\Phi = LI \text{ avec } d\vec{S} = \otimes \quad \text{Unités: } \left[\frac{V \cdot s}{A} \right] = [H] \text{ (Henry)}$$

Il dépend seulement de la forme géométrique du conducteur. En vertu de la loi de Faraday,

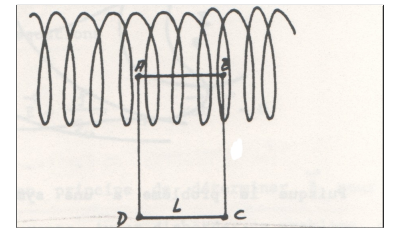
$$U_{ind} = -\dot{\Phi} = -L\dot{I} \Rightarrow U_{AB} = L\dot{I}$$

EXEMPLE 13.2. On considère à nouveau un solénoïde long, c'est-à-dire un fil enroulé autour d'un cylindre (une bobine). On trouve que le flux magnétique à travers la bobine vaut

$$\Phi = \pi r^2 \mu_0 \frac{nI}{l}$$

où r est le rayon de la bobine et l sa longueur. Par conséquent, la tension induite par une variation du courant, vaut

$$U_{ind} = -n\dot{\Phi} = -\mu_0 \frac{n^2 S}{l} \dot{I} = -L\dot{I} \Rightarrow L = \mu_0 n^2 \frac{S}{l}$$



où S est la surface de la section de la bobine et n le nombre de spires.

(Dessin: écolde de physique UNIGE)

REMARQUE 13.3. Comme nous l'avons déjà mentionné, en raison du signe $-$ dans le loi de Faraday, la tension induite s'oppose aux variations de courant. Une bobine dans un circuit électrique joue donc le même rôle que la masse inertielle en dynamique. La masse s'oppose aux variations de vitesse puisque en vertu de la deuxième loi de Newton

$$\dot{v} = a = \frac{F_{res}}{m}$$

De façon similaire, une bobine s'oppose aux variations de courant.

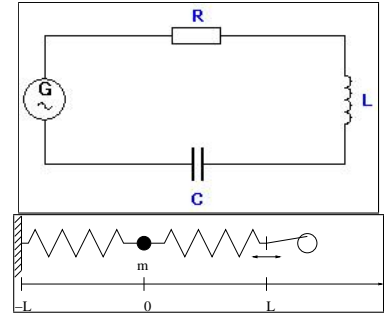
Remarquons que l'équation pour le courant dans un circuit RLC série est donnée par

$$L\ddot{I} + R\dot{I} + \frac{I}{C} = \dot{U}_{\text{générateur}}$$

où L est le coefficient d'auto-induction de la bobine, R la valeur de la résistance, C la capacité du condensateur et $U_{\text{générateur}}$ la tension du générateur. Par ailleurs, l'équation du mouvement d'un oscillateur harmonique forcé est donnée par

$$m\ddot{x} + \eta\dot{x} + 2kx = ky(t)$$

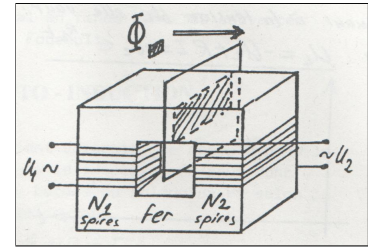
où m est la masse, η est le coefficient de frottement et $2k$ la constante du système des deux ressorts. On remarque que ces équations sont similaires et que L joue le rôle de m .



14. Applications de l'induction

14.1. Les transformateurs.

Un transformateur se compose de deux enroulements, le primaire et le secondaire, bobinés sur une carcasse métallique (fer doux) qui réalise entre eux un couplage inductif. En appliquant une tension alternative (U_1) au primaire, on y fait circuler un courant alternatif (I_1) qui provoque sans le fer un champ magnétique B (donc un flux magnétique) alternatif. Ce dernier crée la tension U_2 dans le secondaire par induction.



(Dessin: Collège de Candolle)

REMARQUE 14.1. Nous supposons que nous avons des transformateurs idéaux, c'est-à-dire que nous admettons que la résistance ohmique des circuits est négligeable et que les pertes de flux sont aussi négligeables.

Le flux d'induction Φ à travers toute section du circuit magnétique est le même à chaque instant. Ainsi

$$\begin{cases} \Phi_1 \text{ à travers la bobine 1} = N_1\Phi \Rightarrow \dot{\Phi}_1 = N_1\dot{\Phi} \\ \Phi_2 \text{ à travers la bobine 2} = N_2\Phi \Rightarrow \dot{\Phi}_2 = N_2\dot{\Phi} \end{cases}$$

En considérant la transformation dans le sens $1 \rightarrow 2$, on trouve

$$U_2 = U_{\text{ind}2} = -\dot{\Phi}_2 = -N_2\dot{\Phi}$$

et en considérant la transformation dans le sens $2 \rightarrow 1$, on trouve

$$U_1 = U_{\text{ind}1} = -\dot{\Phi}_1 = -N_1\dot{\Phi}$$

Le transformateur fonctionnant dans les deux sens pour un même Φ , il suit que

$$\dot{\Phi} = -\frac{U_2}{N_2} = -\frac{U_1}{N_1} \Rightarrow \boxed{\frac{U_2}{U_1} = \frac{N_2}{N_1}}$$

Les transformateurs sont d'un usage extrêmement courant, dans toutes les gammes de puissance: radio, T.V., allumage de voiture, industrie, centrales et réseaux électriques, four à induction, etc.

15. Equations d'onde

Dans le vide ($\rho = 0$ et $\vec{j} = \vec{0}$), les équation de Maxwell deviennent,

$$\vec{\nabla} \bullet \vec{E} = 0 \quad (M1)$$

$$\vec{\nabla} \bullet \vec{B} = 0 \quad (M2)$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\dot{\vec{B}} \quad (M3)$$

$$c^2 \vec{\nabla} \times \vec{B} = \dot{\vec{E}} \quad (M4)$$

En dérivant la troisième équation par rapport à t , on obtient

$$-\ddot{\vec{B}} = \partial_t (\vec{\nabla} \times \vec{E}) = \vec{\nabla} \times \dot{\vec{E}} \stackrel{CM4}{=} \vec{\nabla} \times (c^2 \vec{\nabla} \times \vec{B}) = c^2 \left(\underbrace{\vec{\nabla} (\vec{\nabla} \bullet \vec{B})}_{\stackrel{CM2_0}{=}} - (\vec{\nabla} \bullet \vec{\nabla}) \vec{B} \right)$$

c'est-à-dire

$$\frac{1}{c^2} \ddot{\vec{B}} = \Delta \vec{B}$$

où

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

est le Laplacien.

En dérivant la quatrième équation par rapport à t , on obtient

$$-\ddot{\vec{E}} = \partial_t (c^2 \vec{\nabla} \times \vec{B}) = c^2 \vec{\nabla} \times \dot{\vec{B}} \stackrel{CM3}{=} \vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{E}) = c^2 \left(\underbrace{\vec{\nabla} (\vec{\nabla} \bullet \vec{E})}_{\stackrel{CM1_0}{=}} - (\vec{\nabla} \bullet \vec{\nabla}) \vec{E} \right)$$

c'est-à-dire

$$\frac{1}{c^2} \ddot{\vec{E}} = \Delta \vec{E}$$

REMARQUE 15.1. Les équations pour \vec{E} et \vec{B} sont des équations d'onde comme nous allons le voir. En introduisant le d'Alembertien

$$\square = \frac{\partial^2}{\partial t^2} - c^2 \Delta$$

Les équations pour \vec{E} et \vec{B} deviennent

$$\square \vec{E} = 0 \text{ et } \square \vec{B} = 0$$

Cherchons pour \vec{E} une solution de la forme

$$\vec{E}(\vec{x}, t) = \vec{E}_0(\vec{k}) e^{i(\vec{k} \bullet \vec{x} + \omega t)} = \vec{E}_0(\vec{k}) \left(\cos(\vec{k} \bullet \vec{x} + \omega t) + i \sin(\vec{k} \bullet \vec{x} + \omega t) \right)$$

Alors

$$\square \vec{E} = -\left(\omega^2 - c^2 \|\vec{k}\|^2\right) \vec{E} = 0 \Rightarrow \omega = \pm c \|\vec{k}\|$$

C'est une onde. Calculons sa vitesse: sa longueur d'onde est donnée par

$$\lambda = \frac{2\pi}{\|\vec{k}\|}$$

et sa période par

$$T = \frac{2\pi}{\omega}$$

Ainsi, sa vitesse vaut

$$v = \frac{\lambda}{T} = \frac{\frac{2\pi}{\|\vec{k}\|}}{\frac{2\pi}{\omega}} = \frac{\omega}{\|\vec{k}\|} = \pm c$$

Pour une condition initiale donnée $\vec{E}(\vec{x}, 0)$ pour laquelle la transformée de Fourier existe

$$\vec{E}(\vec{x}, 0) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}} \int \vec{E}_0(\vec{k}) e^{i\vec{k} \cdot \vec{x}} d^3 k$$

la solution est donnée par

$$\vec{E}(\vec{x}, t) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}} \int \vec{E}_0(\vec{k}) e^{i(\vec{k} \cdot \vec{x} + c\|\vec{k}\|t)} d^3 k$$

CHAPITRE 5

Circuits électriques

Dans ce chapitre, nous allons étudier plusieurs circuits électriques composés d'un générateur, de résistances, de condensateurs et de bobines. Les éléments sont reliés par des fils dont la résistance est supposée nulle. Les tensions aux bornes des différents éléments sont mesurées avec un voltmètre et les courants avec un ampèremètre.

1. Symboles

Les symboles utilisés pour représenter les différents éléments d'un circuit se trouvent sur dans le tableau 1.





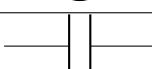
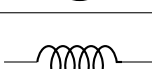
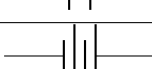

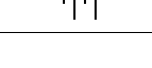

Fil		Résistance	
Ampèremètre		Voltmètre	
Condensateur		Bobine	
Source de tension continue		Source de tension alternative	
Interrupteur		Résistance variable	

TABLEAU 1. Symboles utilisés pour représenter les différents éléments d'un circuit électrique.

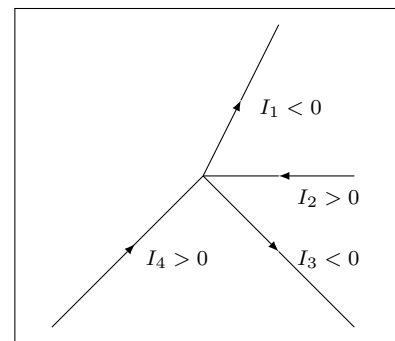
2. Lois de Kirchhoff

2.1. Première loi de Kirchhoff: Loi des nœuds.

Un nœud est un point dont partent plusieurs fils. En vertu du principe de conservation de la charge, la somme algébrique des courants entrants et sortants est nulle:

$$\sum_{k=1}^n I_k = 0$$

On peut, par exemple, adopter la convention de compter positivement les courants qui entrent et de compter négativement les courants qui sortent.



2.2. Deuxième loi de Kirchhoff: Loi des mailles.

Si le flux du champ magnétique à travers un circuit électrique est nul, alors, en vertu de la troisième équation de Maxwell, pour tout chemin fermé (le bord ∂S d'une surface S),

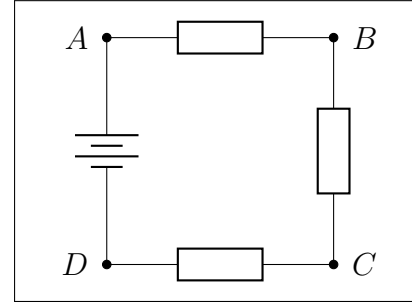
$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\dot{\vec{B}} \Rightarrow \int_{\partial S} \vec{E} \cdot d\vec{l} = \int_S (\vec{\nabla} \times \vec{E}) \cdot d\vec{S} = - \int_S \dot{\vec{B}} \cdot d\vec{S} = 0$$

Considérons par exemple le chemin

$$A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow D \rightarrow A$$

sur le circuit présenté ci-contre. Il y a un générateur et trois éléments quelconques. Alors,

$$\int_{A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow D \rightarrow A} \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0 \Rightarrow U_{AB} + U_{BC} + U_{CD} + U_{DA} = 0$$



Cette loi est valable dans le cas de courants continus. Elle reste valable en bonne approximation avec des courants alternatifs à "basses fréquences". Pour de l'électronique hautes fréquences, l'auto-induction dans le circuit n'est plus négligeable.

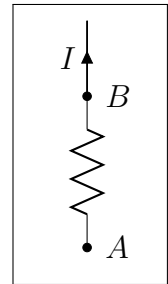
3. Les Résistances

Pour une résistance,

$$U_{AB} = R \cdot I$$

où I est le courant traversant la résistance, c'est-à-dire le débit de charge (unités: $\frac{C}{s} = A = \text{ampère}$) compté positivement dans le sens de la flèche. La constante R est appelée la résistance (unités: $\frac{V}{A} = \Omega = \text{Ohm}$). Par exemple, pour un fil de section S et de longueur l ,

$$R = \rho \frac{l}{S}$$



où ρ est la résistivité du matériau utilisé. Par exemple,

$$\rho_{\text{cuivre}} = 1.68 \cdot 10^{-8} \Omega \cdot m$$

$$\rho_{\text{verre}} = 10^{17} \Omega \cdot m$$

La puissance dissipée par une résistance est donnée par (effet Joule)

$$P = U \cdot I = RI^2 = \frac{U^2}{R}$$

En effet, une charge q passant à travers la résistance perd une énergie égale à

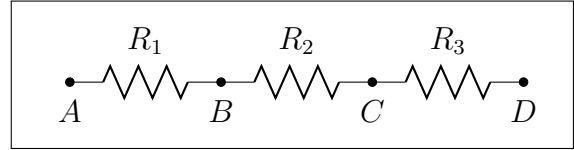
$$q \cdot U$$

Cette énergie est transformée en chaleur. La quantité d'énergie dissipée par unité de temps est donnée par

$$P = \frac{q \cdot U}{t} = U \frac{q}{t} = U \cdot I$$

3.1. Résistances en séries.

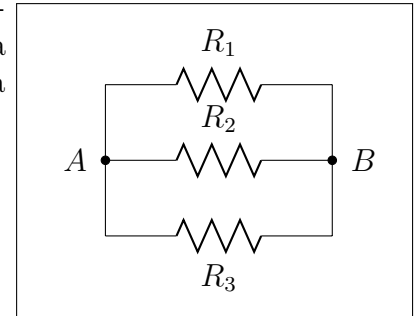
Des résistances montées en série comme sur la figure ci-contre sont équivalentes à une résistance de résistance R_{equiv} . Le courant traversant toutes les résistances est le même. Par conséquent



$$U_{AD} = U_{AB} + U_{BC} + U_{CD} = R_1 I + R_2 I + R_3 I = R_{equiv} I \Rightarrow \boxed{R_{equiv} = R_1 + R_2 + R_3}$$

3.2. Résistances en parallèle.

Des résistances montées en parallèle comme sur la figure ci-contre sont équivalentes à une résistance de résistance R_{equiv} . La différence de potentiel aux bornes de toutes les résistances est la même. Par conséquent



$$U_{AB} = R_1 I_1 = R_2 I_2 = R_3 I_3 = R_{equiv} I \text{ et } I = I_1 + I_2 + I_3$$

$$\Rightarrow \frac{1}{R_{equiv}} = \frac{I}{U_{AB}} = \frac{I_1 + I_2 + I_3}{U_{AB}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{1}{R_{equiv}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}}$$

4. Les condensateurs

Comme nous l'avons vu, la tension (ou différence de potentiel) aux bornes d'un condensateur est donnée par

$$U = \frac{Q}{C}$$

Par conséquent, en dérivant par rapport au temps, on trouve

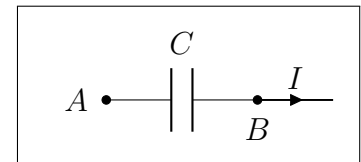
$$\dot{U} = \frac{I}{C}$$

où I est le courant traversant le condensateur.

Soyons plus précis concernant le signe du courant:

$$U_{AB} = \frac{Q}{C} \Rightarrow \dot{U}_{AB} = \frac{I}{C}$$

où le courant $I > 0$ dans le sens de la flèche et $I < 0$ dans le sens contraire. Rappelons que par convention, le courant indique le mouvement des charges positives.



En effet, imaginons par exemple que la plaque de gauche du condensateur soit positive (et donc celle de droite est négative). Alors $U_{AB} > 0$. Si le courant est dans le sens de la flèche, cela signifie que la plaque de droite se charge négativement et donc $\dot{U}_{AB} > 0$. De façon similaire, si c'est la plaque de droite du condensateur qui est positive, alors $U_{AB} < 0$. Si le courant est dans le sens de la flèche, alors la charge de la plaque de droite diminue et $\dot{U}_{AB} > 0$.

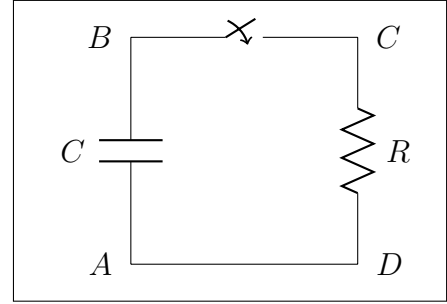
4.1. Décharge et recharge d'un condensateur à travers une résistance.

On charge un condensateur puis on ferme le commutateur du circuit représenté sur la figure ci-contre. En vertu des lois de Kirchhoff, il vient

$$U_{AB} + U_{CD} = 0 \Rightarrow \frac{Q}{C} + RI = 0$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dt} \frac{Q}{C} + RI = 0 \Rightarrow \frac{I}{C} + RI = 0$$

$$RI = -\frac{I}{C} \Rightarrow I(t) = I_0 e^{-t/(RC)}$$



où I représente la valeur absolue du courant. Le sens du courant est déterminé par la charge initiale du condensateur. Par exemple, si initialement, la plaque supérieure du condensateur est positive, alors le courant tournera dans le sens horaire \odot . Par ailleurs,

$$RI_0 = \frac{|Q_0|}{C} \Rightarrow I_0 = \frac{|Q_0|}{RC}$$

Conclusion: le courant décroît de manière exponentielle.

On considère le circuit représenté sur la figure 1. On charge le condensateur en mettant le commutateur en position 1 et on le recharge en mettant le commutateur en position 2. Lorsque le commutateur est en position 1, en vertu des lois de Kirchhoff, il vient ($U_0 > 0$)

$$U_{BA} + U_{AD} + U_{DB} = 0 \Rightarrow -U_0 + \frac{Q}{C} + RI = 0$$

$$\Rightarrow 0 + \frac{I}{C} + RI = 0 \Rightarrow I(t) = I_0 e^{-t/(RC)} \text{ avec } U_0 = RI_0$$

Par ailleurs, la charge du condensateur est donnée par,

$$|Q(t)| = \int_0^t I(\tau) d\tau = -I_0 RC e^{-t/(RC)} + I_0 RC = I_0 RC (1 - e^{-t/(RC)}) = U_0 C (1 - e^{-t/(RC)})$$

Par ailleurs, en vertu de la Loi de Kirchhoff,

$$U_{AD} = -U_{BA} - U_{DB} = U_0 - RI = U_0 - RI_0 e^{-t/(RC)} = U_0 (1 - e^{-t/(RC)})$$

4.2. Tube à décharges.

En disposant aux bornes d'une capacité un tube à décharges (voir figure 2) qui se court-circuite lorsque la tension atteint une valeur U_a (tension d'allumage) et qui se recharge pour une tension U_e (tension d'extinction), on obtient une répétition du phénomène sous forme d'oscillations de relaxation. Si la résistance interne du tube est beaucoup plus petite que la résistance R , la décharge est quasi-instantanée. La période T est donnée par

$$\begin{cases} U_a = U_0 (1 - e^{-t_1/(RC)}) \Rightarrow t_1 = -RC \ln(1 - U_a/U_0) \\ U_e = U_0 (1 - e^{-t_0/(RC)}) \Rightarrow t_0 = -RC \ln(1 - U_e/U_0) \end{cases}$$

$$\Rightarrow T = t_1 - t_0 = -RC \ln \left(\frac{U_0 - U_a}{U_0 - U_e} \right) = RC \ln \left(\frac{U_0 - U_e}{U_0 - U_a} \right)$$

4.3. Impédance d'un circuit RC série.

Un circuit RC série est soumis à une tension alternative

$$U_{BA} = U_0 \sin(\omega t)$$

où $U_0 > 0$. Alors, en vertu de la Loi de Kirchhoff,

$$U_{BA} = RI + \frac{Q}{C} \xrightarrow{\frac{d}{dt}} \dot{U}_{BA} = R\dot{I} + \frac{I}{C}$$

c'est-à-dire

$$\frac{I}{C} + R\dot{I} = U_0\omega \cos(\omega t)$$

La solution générale de l'équation homogène est donnée par

$$I(t) = I_0 e^{-t/(RC)}$$

Pour trouver une solution particulière de l'équation complète, il faut poser

$$I(t) = a \cos(\omega t) + b \sin(\omega t)$$

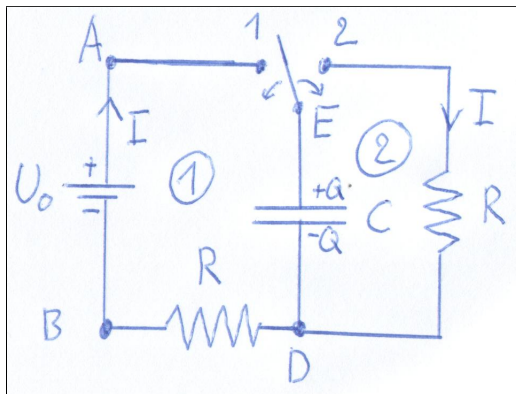
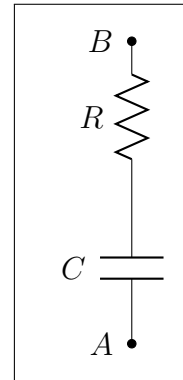


FIGURE 1. Charge d'un condensateur.

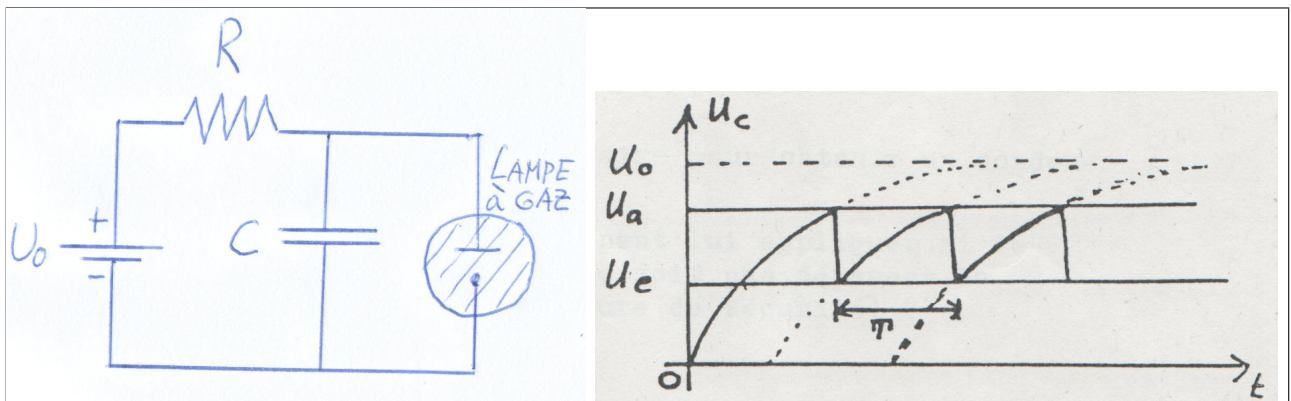


FIGURE 2. Tube à décharges.

En substituant dans l'équation différentielle, on obtient

$$\frac{a}{C} \cos(\omega t) + \frac{b}{C} \sin(\omega t) - R\omega \sin(\omega t) + Rb\omega \cos(\omega t) = U_0\omega \cos(\omega t) \quad \forall t$$

c'est-à-dire

$$\begin{cases} \frac{a}{C} + Rb\omega = U_0\omega \\ \frac{b}{C} - Ra\omega = 0 \end{cases} \Rightarrow a = \frac{\omega C U_0}{1 + R^2 \omega^2 C^2} \text{ et } b = \frac{R \omega^2 C^2 U_0}{1 + R^2 \omega^2 C^2}$$

Rappelons la formule trigonométrique:

$$a \cos(\omega t) + b \sin(\omega t) = A \sin(\omega t + \delta)$$

En posant $t = 0$ on obtient

$$a = A \sin(\delta)$$

et en posant $t = \frac{\pi}{2}$, il vient

$$b = A \sin\left(\frac{\pi}{2} + \delta\right) = A \cos(\delta)$$

Par conséquent,

$$a^2 + b^2 = A^2 \Rightarrow A = \sqrt{a^2 + b^2}$$

et

$$\tan(\delta) = \frac{a}{b} \text{ et } \text{sign}(\delta) = \text{sign}(a)$$

Avec cette formule, il suit que

$$I(t) = I_{max} \sin(\omega t + \delta)$$

où

$$I_{max} = \frac{\sqrt{\omega^2 C^2 U_0^2 + R^2 U_0^2 \omega^4 C^4}}{1 + R^2 \omega^2 C^2} = \frac{U_0 \omega C}{\sqrt{1 + R^2 \omega^2 C^2}}$$

et

$$\tan(\delta) = \frac{1}{R\omega C}$$

On définit l'impédance du circuit comme

$$Z = \frac{U_{max}}{I_{max}}$$

C'est l'équivalent de

$$R = \frac{U}{I}$$

pour du courant alternatif. Dans notre cas, il vient

$$Z = \frac{U_0}{I_{max}} = \sqrt{\frac{1}{\omega^2 C^2} + R^2}$$

Remarquons que pour $R = 0$, il vient

$$Z = \frac{1}{\omega C} \text{ et } \delta = \frac{\pi}{2}$$

