

Notes du cours 4PYOS01-02
I Dynamique du corps solide
2024-2025

B. Ischi

(MaTeX - <http://www.mathex.net>)

COLLÈGE DE CANDOLLE

Table des matières

Chapitre 1. Dynamique des systèmes de particules	3
1. Introduction	3
2. Moment de force et moment cinétique d'une masse ponctuelle	3
3. Centre de masse	4
4. Système de particules	8
Chapitre 2. Le corps solide	9
1. Cinématique	9
2. Axes principaux	12
3. Exemples de calculs de moments d'inertie	13
4. Exemples d'applications	15
5. Règle de Steiner	19
6. Exemple d'application de la règle de Steiner: le pendule physique	19
7. Energie cinétique d'un corps solide	20
8. Le gyroscope	21
Appendice A. Systèmes de particules: développements	23
1. Centre de masse	23
2. Système de particules	29
Appendice A. Le corps solide: développements et cas général	35
1. Cinématique	35
2. Moment d'inertie	45
3. Axes principaux	47
4. Exemple	49
5. Rotation autour d'un axe fixe	51
6. Règle de Steiner	53
7. Exemple d'application de la règle de Steiner: le pendule physique	55
8. Le gyroscope	58
9. Energie cinétique d'un corps solide	59
10. Energie mécanique du corps solide	64
11. Equations d'Euler	66
12. Mouvement de la toupie	74
13. Energie mécanique du corps solide	79

CHAPITRE 1

Dynamique des systèmes de particules

1. Introduction

Jusqu'à présent, nous avons décrit le mouvement d'une masse ponctuelle. Dans ce chapitre, nous allons étudier la dynamique des corps étendus que nous considérons comme des systèmes de N masses ponctuelles en interaction.

Par exemple, ces masses ponctuelles peuvent représenter les molécules constituant le corps étendu. Cette description de la matière est appelée le modèle "discret" par opposition au modèle continu dans lequel un objet est représenté par sa masse volumique $\rho(\vec{r})$, c'est-à-dire une fonction continue de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}$ donnant pour chaque position $\vec{r}$ de l'espace la masse volumique de l'objet en $\vec{r}$. Celle-ci est définie par

$$\rho(\vec{r}) = \lim_{R \rightarrow 0} \frac{M}{V}$$

où M est la masse de la partie de l'objet contenue dans la sphère de rayon R centrée en $\vec{r}$ et V est le volume de cette sphère.

La matière se présente sous différents états. Dans les **gaz**, en dehors des brèves interactions répulsives lors des chocs entre elles, les molécules n'interagissent pas. Dans les **fluides**, les liaisons entre molécules sont permanentes mais les distances les séparant sont variables. Finalement, dans un **solide**, en très bonne approximation, les distances entre les molécules sont constantes. Nous allons considérer des corps solides **rigides** et négliger les éventuelles déformations qui peuvent découler de l'application de forces sur un corps (élasticité).

Nous allons énoncer des lois générales concernant le mouvement des corps étendus puis nous étudierons plus en détails la dynamique des corps solides. L'étude de la mécanique des fluides et des gaz nécessite des connaissances concernant les équations aux dérivées partielles et est abordée uniquement de façon empirique au collège.

Nous commençons par quelques rappels concernant le mouvement d'une masse ponctuelle.

2. Moment de force et moment cinétique d'une masse ponctuelle

On considère un référentiel d'inertie R et une masse ponctuelle m dont la position au temps t relativement au référentiel R est notée $\vec{r}(t)$.

On définit le **moment cinétique** de la masse m par

$$\boxed{\vec{L}(t) = \vec{r}(t) \times \vec{p}(t)}$$

où $\vec{p}(t)$ désigne la quantité de mouvement de m au temps t . Il suit que

$$\vec{L}(t) = \vec{r}(t) \times (m\vec{v}(t)) = m(\vec{r}(t) \times \dot{\vec{r}}(t)) \quad \text{unités: m} \cdot \text{kg} \cdot \text{m/s} = \text{kg} \cdot \text{m}^2/\text{s}$$

Le **moment d'une force** $\vec{F}(t)$ agissant sur m (par rapport à l'origine du référentiel R) est défini par

$$\vec{M}_{\vec{F}}(t) = \vec{r}(t) \times \vec{F}(t) \quad \text{unités: } \text{m} \cdot \text{N} = \text{kg} \cdot \text{m}^2/\text{s}^2 = \text{J}$$

Quand il n'y a pas d'ambiguïté, on ne précise pas par rapport à quelle origine le moment de force est calculé.

L'équation suivante est connue sous le nom de **Théorème du Moment Cinétique**:

$$\dot{\vec{L}}(t) = \vec{M}_{\vec{F}_{res}}(t)$$

En effet, en vertu de la règle de dérivation d'un produit et de la deuxième Loi de Newton, il vient

$$\dot{\vec{L}}(t) = \frac{d}{dt} \left(\vec{r}(t) \times m\dot{\vec{r}}(t) \right) = \underbrace{\dot{\vec{r}}(t) \times m\dot{\vec{r}}(t)}_{=\vec{0}} + \vec{r}(t) \times \underbrace{m\ddot{\vec{r}}(t)}_{=\vec{F}_{res}(t)} = \vec{r}(t) \times \vec{F}_{res}(t) = \vec{M}_{\vec{F}_{res}}(t)$$

Il suit que si le moment de la force résultante est nul, alors le moment cinétique de la masse m est constant

$$\vec{M}_{\vec{F}_{res}} = 0 \Rightarrow \vec{L}(t) = \text{vecteur constant}$$

C'est le cas en particulier pour une force centrale comme, par exemple, la force de gravitation. Il en découle notamment que le mouvement d'une planète a lieu dans un plan.

3. Centre de masse

Notons $\vec{r}_i(t)$ (i entre 1 et N) les positions à un instant t donné des masses ponctuelles m_i constituant un corps étendu S . On définit le **centre de masse** de S par

$$\vec{r}_{CM}(t) = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^N m_i \vec{r}_i(t)$$

où M désigne la masse de S :

$$M = \sum_{i=1}^N m_i$$

REMARQUE 3.1. Pour calculer le centre de masse du système S , on peut: (1) le diviser en K sous-systèmes $S_1, S_2, \dots, S_K$; (2) calculer le centre de masse de chaque sous-système; (3) calculer le centre de masse des centres de masse. En effet, notons I_j l'ensemble des i tels que m_i est dans S_j :

$$I_j = \{i \in \mathbb{N} \mid m_i \in S_j\} \Rightarrow \{1, \dots, N\} = I_1 \cup I_2 \cup \dots \cup I_K \text{ et } I_j \cap I_l = \emptyset \forall j \neq l$$

et M_j la masse du sous-système S_j :

$$M_j = \sum_{i \in I_j} m_i$$

Alors

$$\vec{r}_{CM} = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^N m_i \vec{r}_i = \frac{1}{M} \sum_{j=1}^K \left(\sum_{i \in I_j} m_i \vec{r}_i \right) = \frac{1}{M} \sum_{j=1}^K M_j \underbrace{\left(\frac{1}{M_j} \sum_{i \in I_j} m_i \vec{r}_i \right)}_{=\vec{r}_{CM S_j}} = \frac{1}{M} \sum_{j=1}^K M_j \vec{r}_{CM S_j}$$

Dans le cas d'un modèle continu de S , il vient

$$\vec{r}_{CM}(r) = \frac{1}{M} \int_S \vec{r} \rho(\vec{r}) dV$$

avec

$$M = \int_S \rho(\vec{r}) dV$$

Les intégrales de surface ou de volume n'étant pas étudiées au collège, donnons quelques exemples en guise d'explication des formules qui précèdent.

3.1. Exemples en une dimension.

EXEMPLE 3.2. Commençons par un exemple en une dimension. Considérons une barre homogène de longueur l . Notons ρ_0 sa masse linéique (en kg/m) supposée constante. Alors

$$x_{CM} = \frac{1}{M} \int_0^l x \rho_0 dx = \frac{1}{\rho_0 l} \rho_0 \int_0^l x dx = \frac{1}{l} \frac{1}{2} x^2 \Big|_0^l = \frac{1}{2l} l^2 = \frac{l}{2}$$

Nous trouvons que le centre de masse est au milieu de la barre, comme nous le savions déjà !

Si la barre n'est pas homogène et que, par exemple, $\rho(x) = ax$ (par exemple une barre en forme de flèche plate), alors

$$M = \int_0^l \rho(x) dx = \frac{1}{2} ax^2 \Big|_0^l = \frac{al^2}{2}$$

$$x_{CM} = \frac{1}{M} \int_0^l x \rho(x) dx = \frac{1}{\frac{al^2}{2}} a \int_0^l x^2 dx = \frac{2}{l^2} \frac{1}{3} x^3 \Big|_0^l = \frac{2l^3}{3l^2} = \frac{2}{3}l$$

EXEMPLE 3.3. Poursuivons par un deuxième exemple en une dimension. Nous considérons une barre courbe homogène de masse linéique ρ_0 (en kg/m) supposée constante décrite par le graphe pour $x \in [a, b]$ d'une fonction continûment dérivable f .

Premièrement, la masse de la barre est donnée par

$$M = \rho_0 \int_a^b \sqrt{1 + f'(x)^2} dx$$

En effet, divisons la barre en segments infinitésimaux droits de longueur

$$\sqrt{dx^2 + dy^2} = \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx = \sqrt{1 + f'(x)^2} dx$$

Alors la somme des longueurs des segments donne la longueur de la barre. Par le même raisonnement, nous trouvons pour les coordonnées du centre de masse de la barre courbe

$$x_{CM} = \frac{1}{M} \rho_0 \int_a^b x \sqrt{1 + f'(x)^2} dx$$

$$y_{CM} = \frac{1}{M} \rho_0 \int_a^b f(x) \sqrt{1 + f'(x)^2} dx$$

EXEMPLE 3.4. Nous reprenons l'exemple de la barre courbe homogène de masse linéique ρ_0 (en kg/m) supposée constante. Nous supposons que la barre est décrite par une paramétrisation, c'est-à-dire une application continûment dérivable de $\vec{r} : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^3$ telle que la barre courbe est décrite par l'image par $\vec{r}$ de l'intervalle $[0, 1]$: $\vec{r}([0, 1])$ (la trajectoire). En divisant l'intervalle $[0, 1]$ en intervalles infinitésimaux de longueur dt , et en remarquant que

$$\dot{\vec{r}}(t) = \begin{pmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{y}(t) \\ \dot{z}(t) \end{pmatrix}$$

est le vecteur vitesse de la paramétrisation, nous trouvons que

$$M = \rho_0 \int_0^1 \sqrt{\dot{x}(t)^2 + \dot{y}(t)^2 + \dot{z}(t)^2} dt$$

et

$$x_{CM} = \frac{1}{l} \int_0^1 x(t) \sqrt{\dot{x}(t)^2 + \dot{y}(t)^2 + \dot{z}(t)^2} dt$$

$$y_{CM} = \frac{1}{l} \int_0^1 y(t) \sqrt{\dot{x}(t)^2 + \dot{y}(t)^2 + \dot{z}(t)^2} dt$$

$$z_{CM} = \frac{1}{l} \int_0^1 z(t) \sqrt{\dot{x}(t)^2 + \dot{y}(t)^2 + \dot{z}(t)^2} dt$$

3.2. Exemples en deux dimensions.

EXEMPLE 3.5. Nous poursuivons par un exemple en deux dimensions. Considérons une plaque homogène de masse surfacique ρ_0 (en kg/m²) supposée constante, délimitée par le graphe d'une fonction continue positive f , l'axe des abscisses et deux droites verticales passant par $x = a$ et $x = b$ (voir figure 2). Alors, la masse de la plaque est donnée par

$$M = \int_a^b \rho_0 f(x) dx$$

En en divisant la surface en bandes verticales de largeur infinitésimale dx , on trouve que la coordonnée horizontale de son centre de masse est donnée par

$$x_{CM} = \frac{1}{M} \int_a^b x \rho_0 f(x) dx$$

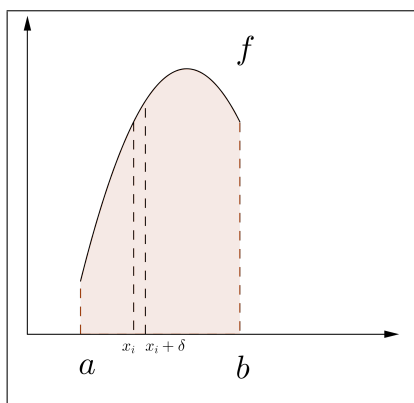


FIGURE 1. Exemple 3.5.

et que la coordonnée verticale du centre de masse de la plaque est donnée par

$$y_{CM} = \frac{1}{2M} \int_a^b \rho_0 f(x)^2 dx$$

3.3. Exemple en trois dimensions.

EXEMPLE 3.6. Poursuivons par un exemple en trois dimensions. Considérons un corps de révolution homogène de masse volumique ρ_0 (en kg/m^3) supposée constante, délimité par la surface engendrée par la rotation autour de l'axe des abscisses du graphe pour $a \leq x \leq b$ d'une fonction continue positive f (voir figure 2).

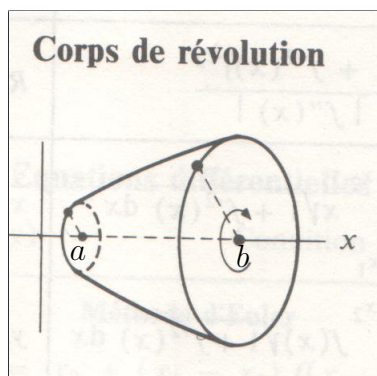


FIGURE 2. Exemple 3.6 (Dessin: table CRM)

En divisant le corps de révolution en disques d'épaisseur infinitésimale dx , on trouve que la masse du corps vaut

$$M = \rho_0 \pi \int_a^b f(x)^2 dx$$

où $\pi f(x)^2$ est la surface du disque en position x et $\pi f(x)^2 dx$ son volume.

Pour des raisons de symétrie, il suit que

$$y_{CM} = 0 = z_{CM}$$

Par ailleurs, la coordonnée x du centre de masse vaut

$$x_{CM} = \frac{1}{M} \rho_0 \pi \int_a^b x f(x)^2 dx$$

4. Système de particules

Considérons un système S de N masses ponctuelles m_i dont les positions à un temps t relativement à un référentiel d'inertie R sont notées $\vec{r}_i(t)$ pour $1 \leq i \leq N$. Notons M la masse totale du système:

$$M = \sum_{i=1}^N m_i$$

4.1. Mouvement du centre de masse.

On peut montrer (voir appendice) que le mouvement du centre de masse d'un corps étendu S correspond à celui d'un point matériel dont la masse est celle du corps S et sur lequel une force égale à la résultante de toutes les forces extérieures est appliquée:

$$\boxed{\vec{F}_{res\ ext}(t) = M \vec{a}_{CM}(t)}$$

où $\vec{F}_{res\ ext}$ désigne la résultante de toutes les forces extérieures agissant sur le système S et $\vec{a}_{CM}$ l'accélération du centre de masse de S .

4.2. Théorème du moment cinétique.

On peut montrer (voir appendice) que

$$\boxed{\dot{\vec{L}}_{tot\ CM}(t) = \vec{M}_{res\ ext\ CM}(t)}$$

où $\vec{M}_{res\ ext\ CM}$ est la somme de tous les moments, calculés par rapport au centre de masse, de toutes les forces extérieures agissant sur le système de particules S et $\vec{L}_{tot\ CM}$ désigne la somme de tous les moments cinétiques de toutes les masses constituant le système S , calculés relativement au centre de masse.

4.3. Décomposition de l'énergie cinétique.

On peut montrer (voir appendice) que l'énergie cinétique totale du système S est donnée par

$$\boxed{E_{cin\ tot} = E_{cin\ CM} + E'_{cin\ tot}} \text{ avec } \boxed{E_{cin\ CM} = \frac{1}{2} M \|\vec{v}_{CM}(t)\|^2} \text{ et } \boxed{E'_{cin\ tot} = \sum_{i=1}^N \frac{1}{2} m_i \|\dot{\vec{s}}_i(t)\|^2}$$

où $\vec{s}_i$ désigne la position de la masse m_i relativement au centre de masse, *i.e.*

$$\vec{r}_i(t) = \vec{r}_{CM}(t) + \vec{s}_i(t)$$

En mots, l'énergie cinétique totale du système S est égale à l'énergie cinétique du centre de masse plus l'énergie cinétique des particules calculée dans le référentiel du centre de masse.

CHAPITRE 2

Le corps solide

Nous considérons un corps solide S , c'est-à-dire un système de N masses ponctuelles m_i (avec $1 \leq i \leq N$) où les distances entre les masses ne changent pas au cours du temps:

$$\frac{d}{dt} \|\vec{r}_i(t) - \vec{r}_j(t)\| = 0, \quad \forall 1 \leq i, j \leq N$$

où $\vec{r}_j$ désigne la position de la masse ponctuelle m_j relativement à un référentiel d'inertie préalablement choisi. C'est une idéalisation car cette distance n'est en fait jamais constante en raison de l'élasticité du corps et en raison de l'agitation thermique. Pour la description du mouvement d'un corps solide de l'ordre du centimètre ou du mètre, l'agitation thermique peut-être négligée ! Nous supposons également que l'élasticité du corps peut être négligée.

1. Cinématique

En général, il faut $3N$ coordonnées pour décrire la position d'un système de N particules (masses ponctuelles). Pour un corps solide (rigide), comme la distance entre les particules ne change pas, il suffit de donner la position du centre de masse (trois coordonnées) et trois angles qui décrivent la rotation d'un référentiel attaché au centre de masse du corps (trois axes orthogonaux, attachés au solide, dont l'origine coïncide avec le centre de masse). Six paramètres suffisent donc pour décrire complètement la position du solide. On suppose que les axes du référentiel lié au solide sont, au temps $t = 0$, parallèles aux axes du référentiel d'inertie choisi pour décrire le mouvement du corps solide.

1.1. Rotation autour de l'axe des x .

Notons $\vec{s}_j(t)$ la position de la masse m_j relativement au centre de masse au temps t , *i.e.*

$$\vec{r}_j(t) = \vec{r}_{CM}(t) + \vec{s}_j(t)$$

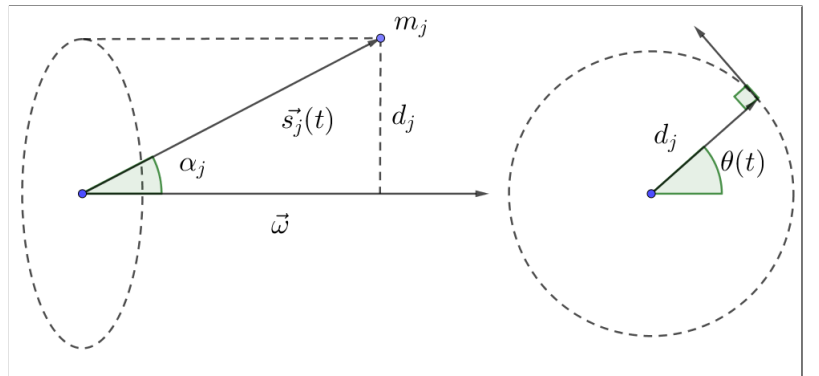
où $\vec{r}_j(t)$ désigne la position de la masse m_j au temps t relativement au référentiel d'inertie du laboratoire.

Remarquons que

$$\dot{\vec{s}}_j(t) = \vec{\omega} \times \vec{s}_j(t)$$

où

$$\vec{\omega} = \begin{pmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dot{\theta}(t) \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$



et où $\theta(t)$ désigne l'angle de rotation du solide au temps t . En effet, la projection de la trajectoire du mouvement de la masse m_j sur la plan yz est un cercle de rayon d_j (la distance à l'axe de

rotation; par hypothèse, c'est l'axe x). Le vecteur vitesse de la masse m_j est tangent à ce cercle et orthogonal au plan engendré par $\vec{\omega}$ et $\vec{s}_j(t)$. De plus, il est de longueur

$$\dot{\theta} \cdot d_j = \underbrace{\|\vec{\omega}\|}_{=\dot{\theta}} \cdot \sin(\alpha_j) \|\vec{s}_j(t)\| = \|\vec{\omega} \times \vec{s}_j(t)\|$$

Notons $\vec{s}_{j0}$ la position (relativement au centre de masse) de la masse ponctuelle m_j au temps $t = 0$ et

$$\vec{s}_j(t) = R_x(\vec{s}_{j0})$$

Remarquons que l'application R_x (qui est une rotation) est une application linéaire:

$$R_x(\vec{a} + \vec{b}) = R_x(\vec{a}) + R_x(\vec{b})$$

et

$$R_x(\lambda \cdot \vec{a}) = \lambda \cdot R_x(\vec{a})$$

L'application R_x dépend de l'angle de rotation $\theta(t)$. C'est pourquoi nous utiliserons également la notation

$$R_{x\theta(t)} \text{ au lieu de } R_x$$

Comme par hypothèse le corps solide tourne autour de l'axe x , on a

$$\vec{L}_{tot CM} = \sum_{j=1}^N m_j \left(\vec{s}_j \times \dot{\vec{s}}_j \right) = \sum_{j=1}^N m_j \left(\vec{s}_j \times (\vec{\omega} \times \vec{s}_j) \right)$$

où $\vec{s}_j = \vec{s}_j(t)$ désigne la position de la masse ponctuelle m_j relativement au centre de masse. Rappelons que

$$\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = (\vec{a} \cdot \vec{c}) \cdot \vec{b} - (\vec{a} \cdot \vec{b}) \cdot \vec{c}$$

Ainsi,

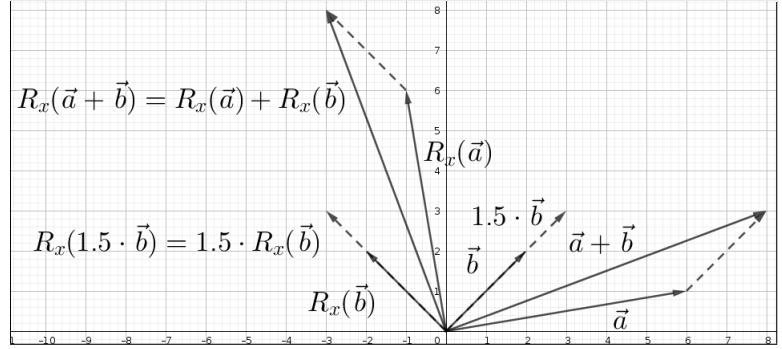
$$\vec{L}_{tot CM} = \sum_{j=1}^N m_j \cdot (\|\vec{s}_j\|^2 \cdot \vec{\omega} - (\vec{s}_j \cdot \vec{\omega}) \cdot \vec{s}_j)$$

Comme une rotation est une isométrie (et donc qu'elle préserve les angles entre les vecteurs), il suit que

$$\|\vec{s}_j(t)\|^2 = \|\vec{s}_{j0}(t)\|^2 \text{ et } \vec{s}_j \cdot \vec{\omega} = (R_x(\vec{s}_{j0})) \cdot (R_x(\vec{\omega})) = \vec{s}_{j0} \cdot \vec{\omega}$$

car, rappelons-le,

$$\vec{\omega} = \begin{pmatrix} \dot{\theta} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow R_x(\vec{\omega}) = \vec{\omega}$$



Par conséquent,

$$\begin{aligned}\vec{L}_{tot\ CM} &= \sum_{j=1}^N m_j (\|\vec{s}_{j0}\|^2 \cdot R_x(\vec{\omega}) - (\vec{s}_{j0} \bullet \vec{\omega}) \cdot R_x(\vec{s}_{j0})) \\ &= R_{x\theta(t)} \left(\sum_{j=1}^N m_j \cdot (\|\vec{s}_{j0}\|^2 \cdot \vec{\omega} - (\vec{s}_{j0} \bullet \vec{\omega}) \cdot \vec{s}_{j0}) \right)\end{aligned}$$

Explicitons le terme entre parenthèses:

$$\begin{aligned}\vec{L}_{tot\ CM} &= R_{x\theta(t)} \left(\sum_{j=1}^N m_j \begin{pmatrix} (s_{j01}^2 + s_{j02}^2 + s_{j03}^2) \omega_1(t) - (s_{j01}\omega_1(t) + s_{j02}\omega_2(t) + s_{j03}\omega_3(t)) s_{j01} \\ (s_{j01}^2 + s_{j02}^2 + s_{j03}^2) \omega_2(t) - (s_{j01}\omega_1(t) + s_{j02}\omega_2(t) + s_{j03}\omega_3(t)) s_{j02} \\ (s_{j01}^2 + s_{j02}^2 + s_{j03}^2) \omega_3(t) - (s_{j01}\omega_1(t) + s_{j02}\omega_2(t) + s_{j03}\omega_3(t)) s_{j03} \end{pmatrix} \right) \\ &= R_{x\theta(t)} \left(\sum_{j=1}^N m_j \begin{pmatrix} (s_{j02}^2 + s_{j03}^2) \omega_1(t) - s_{j01}s_{j02}\omega_2(t) - s_{j01}s_{j03}\omega_3(t) \\ (s_{j01}^2 + s_{j03}^2) \omega_2(t) - s_{j01}s_{j02}\omega_1(t) - s_{j02}s_{j03}\omega_3(t) \\ (s_{j01}^2 + s_{j02}^2) \omega_3(t) - s_{j01}s_{j03}\omega_1(t) - s_{j02}s_{j03}\omega_2(t) \end{pmatrix} \right) \\ &= R_{x\theta(t)} \left(\sum_{j=1}^N m_j \begin{pmatrix} s_{j02}^2 + s_{j03}^2 & -s_{j01}s_{j02} & -s_{j01}s_{j03} \\ -s_{j01}s_{j02} & s_{j01}^2 + s_{j03}^2 & -s_{j02}s_{j03} \\ -s_{j01}s_{j03} & -s_{j02}s_{j03} & s_{j01}^2 + s_{j02}^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega_1(t) \\ \omega_2(t) \\ \omega_3(t) \end{pmatrix} \right) \\ &= R_{x\theta(t)} \left(\underbrace{\begin{pmatrix} \sum_{j=1}^N m_j (s_{j02}^2 + s_{j03}^2) & -\sum_{j=1}^N m_j s_{j01}s_{j02} & -\sum_{j=1}^N m_j s_{j01}s_{j03} \\ -\sum_{j=1}^N m_j s_{j01}s_{j02} & \sum_{j=1}^N m_j (s_{j01}^2 + s_{j03}^2) & -\sum_{j=1}^N m_j s_{j02}s_{j03} \\ -\sum_{j=1}^N m_j s_{j01}s_{j03} & -\sum_{j=1}^N m_j s_{j02}s_{j03} & \sum_{j=1}^N m_j (s_{j01}^2 + s_{j02}^2) \end{pmatrix}}_{=:I} \begin{pmatrix} \omega_1(t) \\ \omega_2(t) \\ \omega_3(t) \end{pmatrix} \right)\end{aligned}$$

La matrice I est appelée le tenseur d'inertie et l'opération mathématique entre la matrice I et le vecteur $\vec{\omega}$ est le produit matriciel.

Dans le modèle continu du corps solide, en notant

$$m_i \vec{s}_{i0} = \rho(\vec{r}) \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} dV$$

il vient

$$I = \begin{pmatrix} \int_{V_S} \rho(\vec{r})(y^2 + z^2) dV & - \int_{V_S} \rho(\vec{r})xy dV & - \int_{V_S} \rho(\vec{r})xz dV \\ - \int_{V_S} \rho(\vec{r})xy dV & \int_{V_S} \rho(\vec{r})(x^2 + z^2) dV & - \int_{V_S} \rho(\vec{r})yz dV \\ - \int_{V_S} \rho(\vec{r})xz dV & - \int_{V_S} \rho(\vec{r})yz dV & \int_{V_S} \rho(\vec{r})(x^2 + y^2) dV \end{pmatrix}$$

REMARQUE 1.1. Quelques remarques s'imposent:

- (1) La matrice I est symétrique:

$$I_{ij} = I_{ji}$$

où I_{ij} désigne l'élément de la matrice I à la ligne i et à la colonne j . De ce fait, la matrice I n'a que 6 composantes indépendantes.

- (2) Les éléments de la matrice dépendent uniquement de la géométrie et de la répartition de la masse dans le solide dans sa position initiale. Ils ne dépendent pas du temps ni du vecteur $\vec{\omega}$.
- (3) Les termes diagonaux de la matrice I (*i.e.* les termes sur la diagonale: I_{ii}) sont appelés les **moments d'inertie** et les termes hors diagonale les **produits d'inertie**.
- (4) Tous les éléments de la matrice ont les mêmes unités: $\text{kg} \cdot \text{m}^2$
- (5) On a la formule compacte

$$I_{ij} = \sum_{k=1}^N m_k (\|\vec{s}_{k0}\|^2 \delta_{ij} - s_{k0i} s_{k0j}) = \sum_{k=1}^N m_k \left((s_{k01}^2 + s_{k02}^2 + s_{k03}^2) \delta_{ij} - s_{k0i} s_{k0j} \right)$$

où

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

est le symbole de Kronecker.

2. Axes principaux

On peut montrer (voir appendice) que pour tout solide, il existe un système d'axes perpendiculaires lié au solide par rapport auquel le tenseur d'inertie I est une matrice diagonale (*i.e.* $I_{ij} = 0$ si $i \neq j$). Ces axes s'appellent les **axes principaux du solide** et les termes diagonaux de I s'appellent les **moments principaux d'inertie**. Ce résultat est connu sous le nom de **théorème des axes principaux**.

EXEMPLE 2.1. Revenons au cas d'un solide qui tourne autour de l'axe des x . Si les trois axes du référentiel lié au solide correspondent aux axes principaux du solide, alors le tenseur d'inertie est une matrice diagonale

$$I = \begin{pmatrix} I_x & 0 & 0 \\ 0 & I_y & 0 \\ 0 & 0 & I_z \end{pmatrix}$$

et le moment cinétique calculé relativement au centre de masse du solide est donné par:

$$\begin{aligned}\vec{L} &= R_{x\theta(t)}(I\vec{\omega}) = R_{x\theta(t)} \left(\begin{pmatrix} I_x & 0 & 0 \\ 0 & I_y & 0 \\ 0 & 0 & I_z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{\theta}(t) \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right) \\ &= R_{x\theta(t)} \left(\begin{pmatrix} I_x \dot{\theta}(t) \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} I_x \dot{\theta}(t) \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\end{aligned}$$

Par conséquent, le théorème du moment cinétique donne

$$\vec{M} = \begin{pmatrix} M_x \\ M_y \\ M_z \end{pmatrix} = \dot{\vec{L}} \Rightarrow \boxed{M_x = I_x \ddot{\theta}}, \quad M_y = 0 = M_z$$

En mots, l'accélération angulaire du solide est donnée par $\ddot{\theta} = \frac{M_x}{I_x}$.

REMARQUE 2.2. Soit Δ un axe principal d'un solide S . Nous notons I_Δ le moment d'inertie principal par rapport à cet axe, c'est-à-dire, $I_\Delta = I_1$ si Δ est le premier axe principal, $I_\Delta = I_2$ si Δ est le deuxième axe principal et $I_\Delta = I_3$ si Δ est le troisième axe principal.

3. Exemples de calculs de moments d'inertie

EXEMPLE 3.1. Soit un bloc parallélépipédique homogène de masse volumique ρ_0 et de masse M (voir figure 1). Les axes principaux sont trois axes passant par le centre de masse (au centre du bloc) et parallèles aux faces. En effet, relativement à ce système d'axes, le tenseur d'inertie est donné par

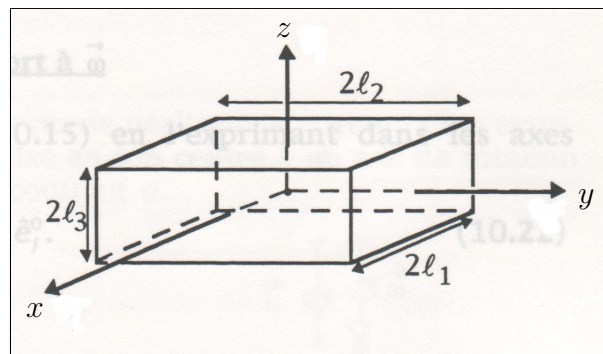


FIGURE 1. Exemple 3.1 (Dessin: UniGe)

$$\begin{aligned}
I_1 = I_{11} &= \rho_0 \int_{y=-l_2}^{l_2} \left(\int_{z=-l_3}^{l_3} \left(\int_{x=-l_1}^{l_1} (y^2 + z^2) dx \right) dz \right) dy \\
&= \rho_0 \int_{y=-l_2}^{l_2} \left(\int_{z=-l_3}^{l_3} (y^2 + z^2) 2l_1 dz \right) dy = \rho_0 2l_1 \int_{y=-l_2}^{l_2} \left(\left(y^2 z + \frac{z^3}{3} \right) \Big|_{z=-l_3}^{l_3} \right) dy \\
&= \rho_0 2l_1 \int_{y=-l_2}^{l_2} \left(y^2 2l_3 + 2 \frac{l_3^3}{3} \right) dy = \rho_0 2l_1 \left(\frac{y^3}{3} 2l_3 + \frac{2}{3} l_3^3 y \right) \Big|_{y=-l_2}^{l_2} \\
&= \rho_0 \frac{8}{3} l_1 (l_2^3 l_3 + l_3^3 l_2) = \rho_0 \frac{8}{3} l_1 l_2 l_3 (l_2^2 + l_3^2) = \frac{M}{3} (l_2^2 + l_3^2)
\end{aligned}$$

De manière similaire, on trouve

$$I_2 = I_{22} = \frac{M}{3} (l_1^2 + l_3^2)$$

$$I_3 = I_{33} = \frac{M}{3} (l_1^2 + l_2^2)$$

Finalement, par exemple,

$$I_{12} = \rho_0 \int_{y=-l_2}^{l_2} \left(\int_{z=-l_3}^{l_3} \underbrace{\left(\int_{x=-l_1}^{l_1} (xy) dx \right)}_{=0} dz \right) dy = 0$$

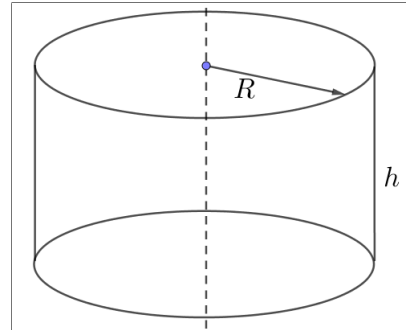
et de manière similaire, on trouve

$$I_{13} = I_{23} = 0$$

En résumé,

$$I = \frac{M}{3} \begin{pmatrix} (l_2^2 + l_3^2) & 0 & 0 \\ 0 & (l_1^2 + l_3^2) & 0 \\ 0 & 0 & (l_1^2 + l_2^2) \end{pmatrix}$$

EXEMPLE 3.2. Considérons un cylindre homogène de masse M et de rayon R . Par des calculs similaires à ceux l'exemple du parallélépipède rectangle, on peut: (1) montrer qu'un système d'axes dont l'axe x est l'axe d'invariance par rotation du cylindre est un système d'axes principaux et (2) calculer le tenseur d'inertie (voir appendice). On trouve en particulier que $I_x = \frac{1}{2}MR^2$.



EXEMPLE 3.3. Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue positive et soit S le corps de révolution engendré par la rotation du graphe de f autour de l'axe des abscisses (plus précisément par la rotation de la surface délimitée par le graphe de f , l'axe des abscisses et les deux axes verticaux

passant par a et b). Nous supposons que le corps est homogène de masse volumique constante ρ_0 . Par conséquent

$$M = \rho_0 \pi \int_a^b f(x)^2 dx$$

Pour des raisons de symétrie, l'axe des abscisses, que nous notons Δ , est un axe principal. Les autres axes principaux sont perpendiculaires à Δ . En fait, toute paire d'axes perpendiculaires entre eux et à Δ forme avec Δ un système d'axes principaux.

Calculons I_Δ . Le corps de révolution peut être décomposé en disques de rayon $f(x)$ et d'épaisseur dx . Le moment d'inertie par rapport à Δ d'un tel disque vaut, comme nous l'avons vu ci-dessus,

$$\underbrace{\frac{1}{2} \rho_0 \pi f(x)^2 dx}_{=V} \underbrace{f(x)^2}_{R^2}$$

$=M$

Par conséquent,

$$I_\Delta = \frac{1}{2} \rho_0 \pi \int_a^b f(x)^4 dx$$

4. Exemples d'applications

4.1. Trajectoire d'un rotateur.

Considérons deux masses m liées par un barreau de longueur $2R$ de masse négligeable. On appelle un tel système un **rotateur**. Les deux masses glissent sans frottement sur un plan horizontal. Le rotateur est initialement au repos. Choisissons un système d'axes x, y de manière à ce que les positions initiales des masses du rotateur soient données par

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ et } \begin{pmatrix} 0 \\ 2R \end{pmatrix}$$

Cela signifie qu'au temps 0, le rotateur est parallèle à l'axe des y avec une masse à l'origine (voir figure 2). L'axe z “sort” du plan.

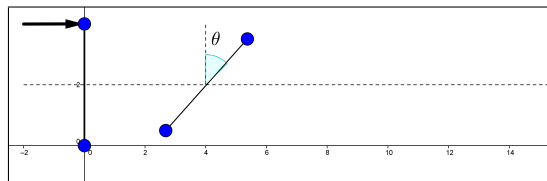


FIGURE 2. Rotateur

Au temps $t = 0$ on communique à la masse qui se trouve à la position $(0, 2R)$ une quantité de mouvement P . On aimerait connaître la trajectoire de l'autre masse. Les équations du mouvement

sont données par

$$\vec{0} = \vec{F}_{res ext}(t) = 2m\vec{a}_{CM}(t) \quad \vec{a}_{CM} \Rightarrow \dot{\vec{v}}_{CM} \quad \vec{v}_{CM}(t) = \frac{P}{2m} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \vec{v}_{CM} \Rightarrow \dot{\vec{r}}_{CM} \quad \vec{x}_{CM}(t) = \begin{pmatrix} \frac{P}{2m}t \\ R \end{pmatrix}$$

$$\vec{0} = \vec{M}_{res ext CM}(t) = \dot{\vec{L}}_{tot CM}(t) \Rightarrow \|\vec{L}_{tot CM}(t)\| = \|\vec{L}_{tot CM}(0)\| = RP$$

$$\Rightarrow I_3\omega(t) = 2R^2m\omega(t) = -RP \quad \omega(t) \Rightarrow \dot{\theta}(t) \quad \theta(t) = -\frac{P}{2Rm}t$$

Remarquons que le moment cinétique initial de la masse du haut est un vecteur qui “rentre dans le plan”. En combinant le mouvement du centre de masse et le mouvement de rotation du rotateur, on trouve que l'horaire de la masse initialement à l'origine est donné par

$$\begin{aligned} \vec{r}(t) &= \vec{r}_{CM}(t) + \begin{pmatrix} R \sin(\theta(t)) \\ -R \cos(\theta(t)) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{P}{2m}t \\ R \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} R \sin(\theta(t)) \\ -R \cos(\theta(t)) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{P}{2m}t + R \sin(\theta(t)) \\ R - R \cos(\theta(t)) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{P}{2m}t - R \sin\left(\frac{P}{2Rm}t\right) \\ R - R \cos\left(\frac{P}{2Rm}t\right) \end{pmatrix} \quad \omega_0 := \frac{P}{2Rm} \quad R \begin{pmatrix} \omega_0 t - \sin(\omega_0 t) \\ 1 - \cos(\omega_0 t) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

La trajectoire est affichée sur le graphique de la figure 3 pour $R = 1$ m et $\omega_0 = 1 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$.

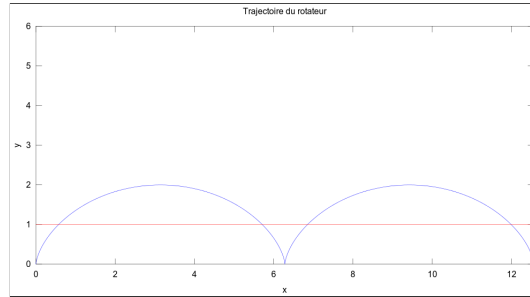


FIGURE 3. Trajectoire du rotateur pour $R = 1$ m et $\omega_0 = 1 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$.

4.2. Cylindre sur un plan incliné.

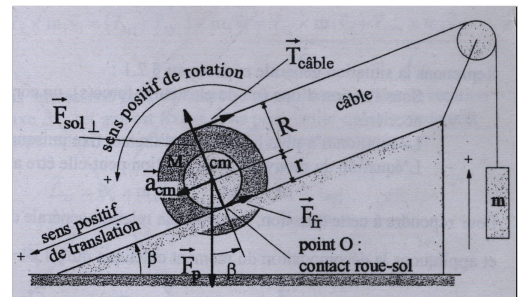
Le cylindre de rayon R roule sans glisser sur un plan incliné autour d'un épaulement latéral de rayon r (de masse négligeable). Un fil est enroulé autour du cylindre et relié à une masse m via une poulie de moment d'inertie négligeable.

Les équations du mouvement pour le cylindre sont données par

$$\begin{aligned} \vec{F}_{res ext} &= M\vec{a}_{CM} \\ \vec{M}_{res ext CM} &= \dot{\vec{L}}_{tot CM} = I\vec{\alpha}(t) \end{aligned}$$

La première équation devient

$$Mg \sin(\beta) - T - F_{adh} = Ma_{CM}$$



(Dessin: Collège de Candolle)

Pour la masse m , l'équation du mouvement est donnée par

$$ma_m = T - mg$$

Finalement, l'équation décrivant la rotation est donnée par

$$-RT + rF_{adh} = \frac{1}{2}MR^2\alpha$$

Remarquons, par exemple, que le moment de force de la tension calculé par rapport au centre de masse, est un vecteur qui “rentre dans le dessin”. Remarquons également que la force d'adhérence est dirigée vers le haut, ce qui “fait tourner le cylindre vers le bas”. Les différentes accélérations sont reliés comme suit

$$a_{CM} = r\alpha \text{ et } a_m = \frac{R+r}{r}a_{CM}$$

La deuxième égalité s'explique ainsi: en déroulant x mètres de fil, le cylindre tourne de $-\frac{x}{R}$ radians; par conséquent son centre monte de $\frac{x}{R}r$ mètres et la masse m descend de $\frac{x}{R}r + x = x\frac{R+r}{R}$ mètres; il suit que si le centre du cylindre monte de $y = \frac{x}{R}r$ mètres ($\Rightarrow x = y\frac{R}{r}$), la masse m descend de $x\frac{R+r}{R} = y\frac{R}{r}\frac{R+r}{R} = y\frac{R+r}{r}$. Deuxième explication: si le cylindre tourne d'un angle $\theta > 0$, son centre de masse descend le long du plan incliné d'une distance égale à $\theta \cdot r$ et une longueur $\theta \cdot R$ de fil s'enroule autour du grand disque. Par conséquent, la masse m monte d'une hauteur $h = \theta \cdot r + \theta \cdot R$. En dérivant deux fois par rapport au temps, on obtient

$$a_m = (r + R) \cdot \alpha = \frac{r + R}{r}a_{CM}$$

En résumé, on trouve un système de 5 équations à 5 inconnues

$$\begin{aligned} Ma_{CM} &= Mg \sin(\beta) - T - F_{adh} \\ ma_m &= T - mg \\ \frac{1}{2}MR^2\alpha &= -RT + rF_{adh} \\ a_{CM} &= r\alpha \\ a_m &= \frac{R+r}{r}a_{CM} \end{aligned}$$

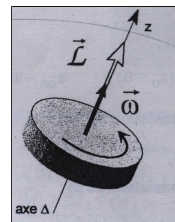
4.3. Conservation du moment cinétique.

Nous considérons deux situations où le moment résultant des forces extérieures est nul

$$\vec{0} = \vec{M}_{res ext CM} = \dot{\vec{L}}_{tot CM}(t) \Rightarrow \vec{L}_{tot CM}(t) = \vec{L}_0 \forall t$$

ce qui implique que le moment cinétique est constant. Dans la situation d'une rotation autour d'un axe fixe Δ qui correspond à un axe principal:

$$\vec{L}_0 = I_{\Delta}\vec{\omega}$$



(Dessin: CdC)

Considérons une patineuse ou un patineur en rotation. Dans la deuxième situation, le moment d'inertie est plus faible. Notons L la norme du moment cinétique $\vec{L}$. Il vient

$$I_2 < I_1 \text{ mais } L_1 = I_1\omega_1 = L_2 = I_2\omega_2 \Rightarrow \omega_2 > \omega_1$$

Nous verrons plus bas que l'énergie cinétique de rotation est donnée par

$$E_{cin rot} = \frac{1}{2}I\omega^2 = \frac{1}{2}L\omega$$

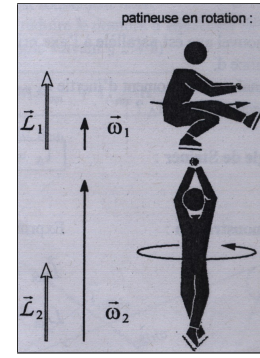
Il suit que

$$\frac{E_{cin rot 2}}{E_{cin rot 1}} = \frac{L_2\omega_2}{L_1\omega_1} = \frac{\omega_2}{\omega_1} \Rightarrow E_{cin rot 2} = \frac{\omega_2}{\omega_1} E_{cin rot 1} \Rightarrow E_{cin rot 2} > E_{cin rot 1}$$

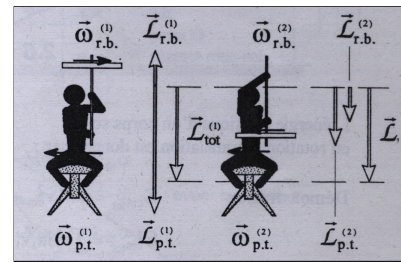
L'énergie cinétique supplémentaire est fournie par le travail de la force des muscles (énergie musculaire).

Considérons l'exemple d'une personne sur un tabouret tournant, tenant dans ses mains une roue de bicyclette qui tourne également. La somme de tous les moments de toutes les forces extérieures est bien nul. En effet, comme le tabouret tourne librement autour de son axe de rotation (roulements à billes), les seules forces extérieures sont le poids et la réaction du siège. Le moment cinétique total et le moment d'inertie de la personne sont les mêmes dans les deux situations. Par ailleurs, la norme du moment cinétique de la roue est la même dans les deux situations.

En effet, comme la roue tourne librement autour de son axe de rotation (roulements à billes), le moment d'une force agissant sur la roue ne peut pas être parallèle à l'axe de rotation. Par conséquent, la vitesse angulaire de la personne est plus grande dans la situation de gauche.



(Dessin: CdC)



(Dessin: CdC)

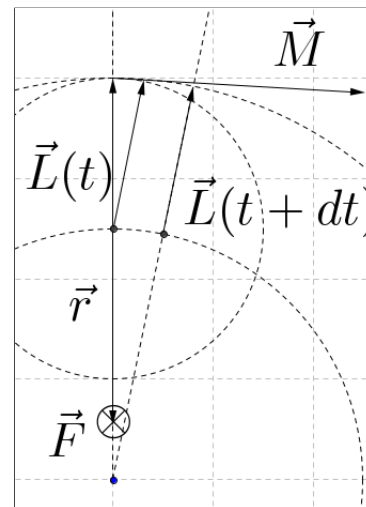
REMARQUE 4.1.

Remarquons que pour faire tourner la roue, la personne doit exercer une force perpendiculaire à l'axe de rotation de la roue (voir schéma ci-contre). Elle pourra modifier la direction du moment cinétique de la roue mais pas sa norme. Sur le schéma, la force $\vec{F}$ "rentre" dans le plan et

$$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}$$

est dirigé vers la droite. On a

$$\vec{L}(t + dt) = \vec{L}(t) + \vec{M}dt$$



5. Règle de Steiner

Si le corps solide S est contraint de tourner autour d'un axe fixe Δ , parallèle et à distance d d'un axe principal Δ' de S (voir figure 4), mais ne passant pas par le centre de masse de S , alors il est plus commode, comme nous le verrons sur un exemple, de ne pas décomposer le mouvement relativement au centre de masse comme nous l'avons fait jusqu'à présent.

On peut montrer (voir appendice) que le moment cinétique total est donné par

$$\vec{L}_{tot} = \mathcal{I}_{\Delta} \vec{\omega}_S(t)$$

avec

$$\mathcal{I}_{\Delta} = I_{\Delta'} + Md^2$$

où M désigne la masse du solide S .

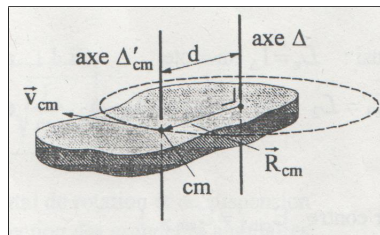


FIGURE 4. Règle de Steiner. (Dessin: CdC)

6. Exemple d'application de la règle de Steiner: le pendule physique

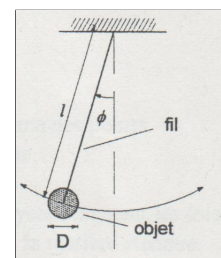
Rappelons que la période d'un pendule simple est donnée par

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}}$$

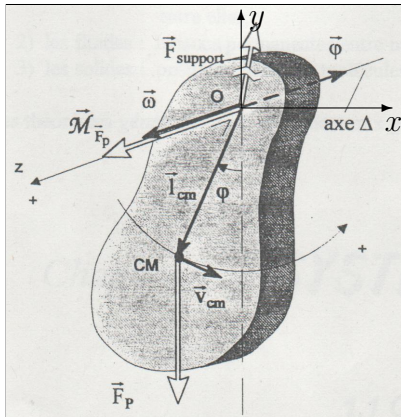
pour autant que:

- (1) l'amplitude des oscillations soit "petite" (*i.e.* telle que $\phi_{max} \approx \sin(\phi_{max})$);
- (2) la masse du fil soit négligeable (*i.e.* $m_{fil} \ll m_{objet}$);
- (3) l'objet suspendu soit "ponctuel" (*i.e.* $D \ll l$).

C'est donc une approximation !



(Dessin: Collège de Candolle)



(Dessin: Collège de Candolle)

Une situation plus réaliste est celle d'un corps rigide étendu (par exemple une barre rigide) qui oscille autour d'un axe passant par un point du corps lui-même, différent du centre de masse ! Un tel pendule est appelé un **pendule physique**. Nous nous affranchissons ainsi des contraintes (2) et (3).

On peut montrer, sous l'hypothèse d'**oscillations de faible amplitude**, que la période du pendule physique est donnée par

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{I_{\Delta}}{mgl_{CM}}}$$

où I_{Δ} désigne le moment d'inertie du corps relativement à l'axe Δ de rotation et de suspension (voir l'appendice).

REMARQUE 6.1. Remarquons que pour une petite boule suspendue à une tige de masse négligeable, on retrouve la période du pendule simple:

$$\begin{aligned} T &= 2\pi \sqrt{\frac{I_{\Delta}}{mgl_{CM}}} \stackrel{\text{Steiner}}{=} 2\pi \sqrt{\frac{I_{\Delta'} + ml_{CM}^2}{mgl_{CM}}} = 2\pi \sqrt{\frac{\frac{2}{5}m\left(\frac{D}{2}\right)^2 + ml_{CM}^2}{mgl_{CM}}} \\ &= 2\pi \sqrt{\frac{ml_{CM}^2 \left(\frac{2}{5} \left(\frac{D}{2l_{CM}} \right)^2 + 1 \right)}{mgl_{CM}}} \stackrel{\frac{D}{2l_{CM}} \ll 1}{\approx} 2\pi \sqrt{\frac{l_{CM}}{g}} \end{aligned}$$

REMARQUE 6.2. Remarquons aussi que

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{I_{\Delta}}{mgl_{CM}}} \stackrel{\text{Steiner}}{=} 2\pi \sqrt{\frac{I_{\Delta'} + ml_{CM}^2}{mgl_{CM}}} \geq 2\pi \sqrt{\frac{ml_{CM}^2}{mgl_{CM}}} = 2\pi \sqrt{\frac{l_{CM}}{g}}$$

En mots, la période du pendule physique est toujours plus grande que la période du pendule simple où toute la masse du pendule physique est concentrée au centre de masse.

7. Energie cinétique d'un corps solide

EXEMPLE 7.1.

On considère un cylindre de rayon r qui roule sans glisser sur un plan incliné (voir figure ci-contre). On trouve

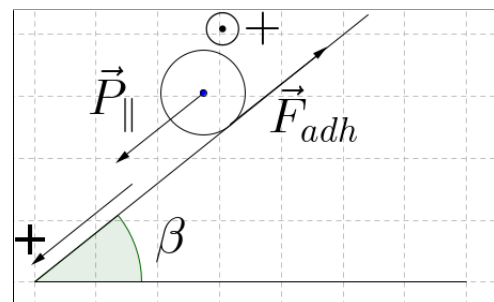
$$\sin(\beta)mg - F_{adh} = ma$$

$$I\alpha = rF_{adh} \quad \Rightarrow \quad a = \frac{\sin(\beta)mg}{m + \frac{I}{r^2}}$$

$$a = \alpha r$$

Notons

$$E = \frac{1}{2}I\omega^2 + \frac{1}{2}mv^2 + mgh$$



Alors,

$$\dot{E} = I\omega\alpha + mva + mg\dot{h} = I\frac{v}{r}\frac{a}{r} + mva - mgv\sin(\beta)$$

c'est-à-dire

$$\dot{E} = v \left(a \left[\frac{I}{r^2} + m \right] - mg\sin(\beta) \right) = 0$$

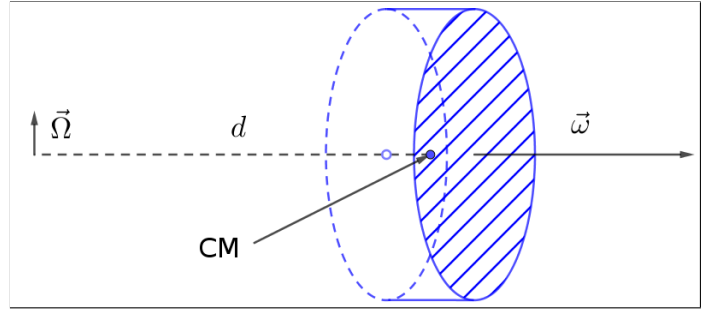
REMARQUE 7.2. Remarquons qu'une particule i à la périphérie du cylindre subit certainement une force non conservative au moment où elle touche le plan incliné. Mais

$$\int_{t_0}^{t_1} \vec{F}_{adh/i}(t) dt = 0$$

car la durée de cette interaction est "négligeable".

8. Le gyroscope

On considère un corps de révolution (comme par exemple un disque), appelé le volant, qui tourne à vitesse angulaire constante $\vec{\omega}$ autour de son axe d'invariance par rotation. On note I son moment d'inertie. Par ailleurs l'axe de rotation du volant tourne à vitesse angulaire constante $\vec{\Omega}$ dans le plan horizontal. On suppose que le centre de masse du volant est à distance d de l'axe de rotation vertical. On suppose également que Ω est beaucoup plus petite que ω .

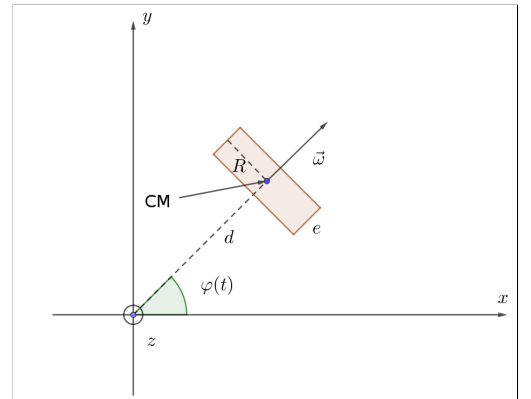


Calculons le moment cinétique du volant. Notons $\varphi(t) = \Omega t$ l'angle entre l'axe de rotation du volant et l'axe x (voir figure ci-contre). Si $\Omega \ll \omega$, alors on peut montrer que le moment cinétique du volant $\vec{L}$ est, en très bonne approximation, aligné avec son axe de rotation (voir appendice)

$$\vec{L}(t) = I\omega \begin{pmatrix} \cos(\varphi(t)) \\ \sin(\varphi(t)) \\ 0 \end{pmatrix}$$

Il suit que

$$\dot{\vec{L}}(t) = I\omega\Omega \begin{pmatrix} -\sin(\Omega t) \\ \cos(\Omega t) \\ 0 \end{pmatrix}$$



APPENDICE A

Systèmes de particules: développements

1. Centre de masse

REMARQUE 1.1. Considérons un référentiel R' ayant la même orientation que le référentiel R mais dont l'origine au temps t est donnée par $\vec{R}'(t)$ dans le référentiel R (voir figure 1). Notons $\vec{r}_{CM}$ le centre de masse calculé dans le référentiel R et $\vec{r}'_{CM}$ le centre de masse calculé dans le référentiel R' . Alors

$$\begin{aligned}\vec{r}'_{CM}(t) &= \frac{1}{M} \sum_{i=1}^N m_i (\vec{r}_i(t) - \vec{R}'(t)) = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^N m_i \vec{r}_i(t) - \frac{1}{M} \sum_{i=1}^N m_i \vec{R}'(t) \\ &= \vec{r}_{CM}(t) - \vec{R}'(t) \underbrace{\frac{1}{M} \sum_{i=1}^N m_i}_1 = \vec{r}_{CM}(t) - \vec{R}'(t)\end{aligned}$$

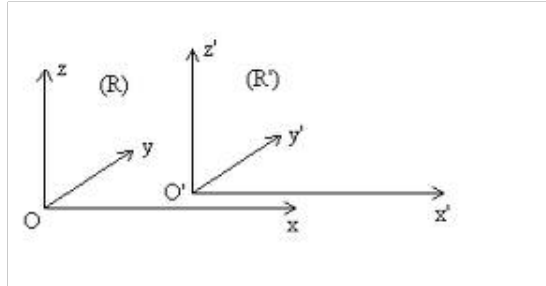


FIGURE 1. Remarque 1.1: $\vec{R}'(t) = \overrightarrow{OO'}(t)$

1.1. Exemples en une dimension.

EXEMPLE 1.2. Nous considérons une barre courbe homogène de masse linéique ρ_0 (en kg/m) supposée constante décrite par le graphe pour $x \in [a, b]$ d'une fonction continûment dérivable f .

Premièrement, la masse de la barre est donnée par

$$M = \rho_0 \int_a^b \sqrt{1 + f'(x)^2} dx$$

En effet, divisons l'intervalle $[a, b]$ en N intervalles de longueur $\delta = \frac{b-a}{N}$. Posons $x_i = a + i \cdot \delta$ pour $0 \leq i \leq N$. Ainsi, $x_0 = a$ et $x_N = b$. Alors, pour N "suffisamment" grand, la masse de la portion de barre entre x_i et $x_{i+1} = x_i + \delta$ est donnée, en vertu du théorème de Pythagore, par

$$\rho_0 \sqrt{(f(x_{i+1}) - f(x_i))^2 + \delta^2} = \rho_0 \delta \sqrt{\left(\frac{f(x_i + \delta) - f(x_i)}{\delta}\right)^2 + 1}$$

en approximant la portion de barre par une droite. Par définition de la dérivée, on a

$$f'(x_i) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_i + h) - f(x_i)}{h} \approx \frac{f(x_i + \delta) - f(x_i)}{\delta}$$

si δ est “suffisamment petit”, c’est-à-dire si N est “suffisamment” grand. Par conséquent,

$$M \approx \rho_0 \sum_{i=1}^N \sqrt{f'(x_i)^2 + 1} \cdot \delta$$

Cette somme est plus grande que la petite somme de Darboux et plus petite que la grande somme de Darboux de la fonction $\sqrt{f'(x)^2 + 1}$ relativement à la division $\{x_0 = a, x_1, \dots, x_{N-1}, x_N = b\}$. Cette fonction est continue, donc intégrable et il suit que

$$M = \lim_{N \rightarrow \infty} \rho_0 \sum_{i=1}^N \sqrt{f'(x_i)^2 + 1} \cdot \delta = \rho_0 \int_a^b \sqrt{1 + f'(x)^2} dx$$

Pour les mêmes raisons, nous trouvons pour les coordonnées du centre de masse de la barre courbe

$$x_{CM} = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{M} \rho_0 \sum_{i=1}^N x_i \sqrt{f'(x_i)^2 + 1} \cdot \delta = \frac{1}{M} \rho_0 \int_a^b x \sqrt{1 + f'(x)^2} dx$$

$$y_{CM} = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{M} \rho_0 \sum_{i=1}^N f(x_i) \sqrt{f'(x_i)^2 + 1} \cdot \delta = \frac{1}{M} \rho_0 \int_a^b f(x) \sqrt{1 + f'(x)^2} dx$$

EXEMPLE 1.3. Nous reprenons l’exemple de la barre courbe homogène de masse linéique ρ_0 (en kg/m) supposée constante. Nous supposons que la barre est décrite par une paramétrisation, c’est-à-dire une application continûment dérivable de $\vec{r}: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^3$ telle que la barre courbe est décrite par l’image par $\vec{r}$ de l’intervalle $[0, 1]$: $\vec{r}([0, 1])$ (la trajectoire). Notons $\delta = \frac{1}{N}$ et $t_i = i \cdot \delta$ (NB: $t_N = 1$), l la longueur de la courbe et

$$\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix}$$

Alors,

$$\begin{aligned} M = \rho_0 \cdot l &= \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{i=0}^{N-1} \rho_0 \|\vec{r}(t_i) - \vec{r}(t_{i-1})\| = \rho_0 \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{i=0}^{N-1} \underbrace{\left\| \frac{\vec{r}(t_i) - \vec{r}(t_{i-1})}{\delta} \right\|}_{\approx \dot{\vec{r}}(t_{i-1})} \delta = \rho_0 \int_0^1 \|\dot{\vec{r}}(t)\| dt \\ &= \rho_0 \int_0^1 \sqrt{\dot{x}(t)^2 + \dot{y}(t)^2 + \dot{z}(t)^2} dt \end{aligned}$$

De plus,

$$x_{CM} = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{M} \sum_{i=0}^{N-1} x(t_{i-1}) \rho_0 \|\vec{r}(t_i) - \vec{r}(t_{i-1})\| = \frac{1}{l} \int_0^1 x(t) \sqrt{\dot{x}(t)^2 + \dot{y}(t)^2 + \dot{z}(t)^2} dt$$

et

$$y_{CM} = \frac{1}{l} \int_0^1 y(t) \sqrt{\dot{x}(t)^2 + \dot{y}(t)^2 + \dot{z}(t)^2} dt$$

$$z_{CM} = \frac{1}{l} \int_0^1 z(t) \sqrt{\dot{x}(t)^2 + \dot{y}(t)^2 + \dot{z}(t)^2} dt$$

1.2. Exemple en deux dimensions.

EXEMPLE 1.4. Nous poursuivons par un exemple en deux dimensions. Considérons une plaque homogène de masse surfacique ρ_0 (en kg/m²) supposée constante, délimitée par le graphe d'une fonction continue positive f , l'axe des abscisses et deux droites verticales passant par $x = a$ et $x = b$ (voir figure 2). Alors, la masse de la plaque est donnée par

$$M = \int_a^b \rho_0 f(x) dx$$

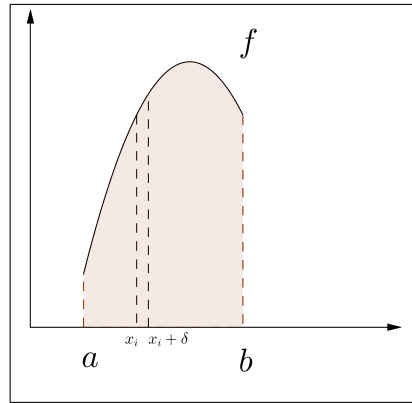


FIGURE 2. Exemple 1.4.

La coordonnée horizontale de son centre de masse est donnée par

$$x_{CM} = \frac{1}{M} \int_a^b x \rho_0 f(x) dx$$

En effet, commençons par diviser la surface en N bandes verticales. Notons $\delta = \frac{b-a}{N}$ la largeur de chaque bande et $x_i = a + i \cdot \delta$. Alors, $x_0 = a$ et $x_N = b$. En bonne approximation, la masse de la bande entre x_i et $x_{i+1} = x_i + \delta$ vaut $\rho_0 \cdot f(x_i) \cdot \delta$. Par conséquent,

$$x_{CM} \approx \frac{1}{M} \sum_{i=1}^N \left(x_i + \frac{\delta}{2} \right) \rho_0 \cdot f(x_i) \cdot \delta$$

Cette somme est plus grande que la petite somme de Darboux et plus petite que la grande somme de Darboux de la fonction $x \cdot f(x)$ associée à la division $\{x_0 = a, x_1, \dots, x_{N-1}, x_N\}$. Comme $x \cdot f(x)$ est une fonction continue, elle est intégrable et nous trouvons que

$$x_{CM} = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{M} \sum_{i=1}^N \left(x_i + \frac{\delta}{2} \right) \rho_0 \cdot f(x_i) \cdot \delta = \frac{1}{M} \int_a^b x \rho_0 f(x) dx$$

De façon similaire, nous trouvons que la coordonnée verticale du centre de masse de la plaque est donnée par

$$y_{CM} = \frac{1}{2M} \int_a^b \rho_0 f(x)^2 dx$$

En effet, la coordonnée verticale du centre de masse de la bande délimitée par x_i et $x_{i+1} = x_i + \delta$ vaut en bonne approximation

$$y_i = \frac{f(x_i)}{2}$$

Par conséquent,

$$y_{CM} \approx \frac{1}{M} \sum_{i=1}^N y_i \cdot \rho_0 \cdot f(x_i) \cdot \delta = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^N \frac{f(x_i)}{2} \cdot \rho_0 \cdot f(x_i) \cdot \delta$$

Et par le même argument que précédemment, nous trouvons que

$$y_{CM} = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{M} \sum_{i=1}^N \frac{f(x_i)}{2} \cdot \rho_0 \cdot f(x_i) \cdot \delta = \frac{1}{2M} \int_a^b \rho_0 f(x)^2 dx$$

1.3. Exemples en trois dimensions.

EXEMPLE 1.5. Poursuivons par un exemple en trois dimensions. Considérons un corps de révolution homogène de masse volumique ρ_0 (en kg/m^3) supposée constante, délimité par la surface engendrée par la rotation autour de l'axe des abscisses du graphe pour $a \leq x \leq b$ d'une fonction continue positive f (voir figure 3).

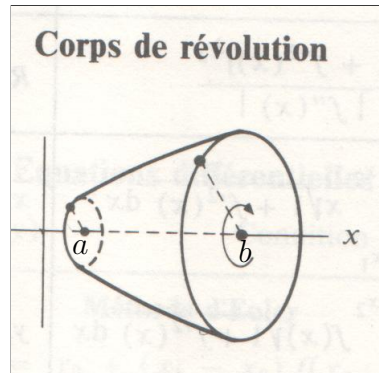


FIGURE 3. Exemple 1.5 (Dessin: table CRM)

Comme cela a été vu au cours de mathématiques, la masse du corps vaut

$$M = \rho_0 \pi \int_a^b f(x)^2 dx$$

Pour des raisons de symétrie, il suit que

$$y_{CM} = 0 = z_{CM}$$

Par ailleurs, la coordonnée x du centre de masse vaut

$$x_{CM} = \frac{1}{M} \rho_0 \pi \int_a^b x f(x)^2 dx$$

En effet, divisons l'intervalle $[a, b]$ en N intervalles: $\delta = \frac{b-a}{N}$, $x_i = a + i \cdot \delta$. La masse du disque délimité par x_i et $x_{i+1} = x_i + \delta$ vaut en bonne approximation

$$\rho_0 \pi f(x_i)^2 \delta$$

Par conséquent,

$$x_{CM} \approx \frac{1}{M} \rho_0 \pi \sum_{i=1}^N x_i f(x_i)^2 \delta$$

Cette somme est plus grande que la petite somme de Darboux et plus petite que grande somme de Darboux de la fonction $x f(x)^2$ associée à la division $\{x_0 = a, x_1, \dots, x_{N-1}, x_N = b\}$. Comme la fonction $x f(x)^2$ est continue, elle est intégrable et il suit que

$$x_{CM} = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{M} \rho_0 \pi \sum_{i=1}^N x_i f(x_i)^2 \delta = \frac{1}{M} \rho_0 \pi \int_a^b x f(x)^2 dx$$

EXEMPLE 1.6. Considérons une fonction de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$. Un exemple bien connu en Suisse est la fonction qui à chaque point du territoire suisse (repéré par deux coordonnées x et y) associe son altitude. Désignons cette fonction par f_{CH} . Par exemple, en prenant les coordonnées utilisées pour les cartes de la Confédération (système “CH1903” introduit en 1903), nous trouvons que

$$x = 601'277 \text{ m}, y = 93'315 \text{ m} \Rightarrow f_{CH}(x, y) = z = 3790 \text{ m}$$

Donnons quelques précisions: le point $x = 0, y = 0$ des cartes suisses est le clocher de l'église de Saint-Emilion près de Bordeaux ! Donc le point $x = 601'277 \text{ m}, y = 93'315 \text{ m}$ est le point à 601'277 m à l'est et à 93'305 m au nord du clocher de l'église de Saint-Emilion. Il s'agit du sommet du Pigne d'Arolla qui culmine à 3790 m au-dessus du niveau de la mer (voir figure 4).

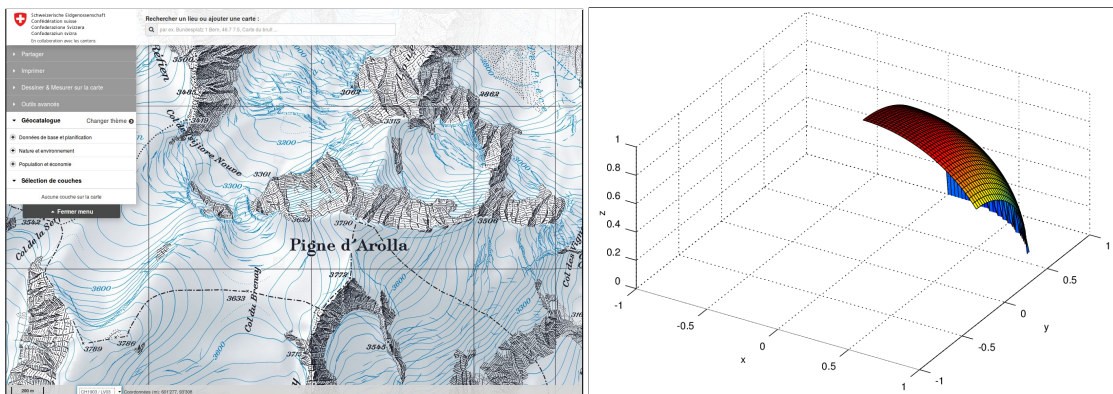


FIGURE 4. Exemple 1.6 (Image: <https://map.geo.admin.ch>)

Le graphe d'une telle fonction peut être représenté en 3 dimensions comme une carte en relief (que l'on trouve parfois sur les cartes postales). Une telle carte en relief peut être représentée en deux dimensions par une vue en perspective.

Soit g une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ positive continue définie sur un intervalle $[a, b]$ et une fonction f de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ continue positive définie sur le domaine 2D délimité par le graphe de g , l'axe des abscisses et les droites $x = a$, $z = 0$ et $x = b$, $z = 0$. Par exemple, pour

$$g(x) = \sqrt{1-x^2} \text{ et } f(x, y) = \sqrt{1-x^2-y^2} \text{ et } a = 0, b = 0.8$$

on obtient une portion de la sphère de rayon 1 centrée en $(0, 0, 0)$ dont la surface extérieure courbe est représentée sur la figure 4 à l'aide du code *Octave* suivant:

```

1 clear
2 a=0;
3 b=0.8;
4 pasx=0.025;
5 pasy=0.025;
6 nx=(b-a)/pasx+1;
7 ny=1/pasy+1;
8 x=a:pasx:b;
9 y=0:pasy:1;
10 [xx,yy]=meshgrid(x,y);
11 function z=f(x,y)
12     if (x.^2+y.^2<=1)
13         z=sqrt(1-x.^2-y.^2);
14     else
15         z=-0.01;
16     endif
17 end
18 for i=1:nx
19     for j=1:ny
20         zz(j,i)=f(x(i),y(j));
21     end
22 end
23 surf(xx,yy,zz)
24 xlabel('x')
25 ylabel('y')
26 zlabel('z')
27 axis([-1 1 -1 1 0 1])
28 view(31,48)
29 print vol.png

```

Soit S le corps homogène de masse volumique ρ_0 supposée constante délimité par la surface de la figure 4 le plan horizontal $z = 0$ et les trois plans verticaux $x = 0$, $y = 0$ et $x = 0.8$. La masse de S est donnée par

$$M = \rho_0 \int_{x=0}^{x=0.8} \left(\int_{y=0}^{\sqrt{1-x^2}} \left(\int_{z=0}^{\sqrt{1-x^2-y^2}} dz \right) dy \right) dx$$

et le centre de masse de S est donné par

$$\begin{aligned}
 x_{CM} &= \frac{1}{M} \rho_0 \int_{x=0}^{x=0.8} \left(\int_{y=0}^{\sqrt{1-x^2}} \left(\int_{z=0}^{\sqrt{1-x^2-y^2}} x dz \right) dy \right) dx \\
 y_{CM} &= \frac{1}{M} \rho_0 \int_{x=0}^{x=0.8} \left(\int_{y=0}^{\sqrt{1-x^2}} \left(\int_{z=0}^{\sqrt{1-x^2-y^2}} y dz \right) dy \right) dx \\
 z_{CM} &= \frac{1}{M} \rho_0 \int_{x=0}^{x=0.8} \left(\int_{y=0}^{\sqrt{1-x^2}} \left(\int_{z=0}^{\sqrt{1-x^2-y^2}} z dz \right) dy \right) dx
 \end{aligned}$$

2. Système de particules

2.1. Mouvement du centre de masse.

Pour chaque masse ponctuelle, on a

$$\vec{F}_{res/i}(t) = \dot{\vec{p}}_i(t)$$

Parmi les forces agissant sur la masse m_i , nous distinguons les interactions avec les autres masses du système des forces provenant de l'extérieur du système:

$$\vec{F}_{res/i} = \vec{F}_{res\ ext/i} + \sum_{j=1, j \neq i}^N \vec{F}_{j/i}$$

où $\vec{F}_{j/i}$ désigne la force exercée par la masse j sur la masse i et $\vec{F}_{res\ ext/i}$ la résultante de toutes les forces extérieures agissant sur la masse i . De l'équation du mouvement pour la masse i , nous déduisons que

$$\sum_{i=1}^N \vec{F}_{res/i}(t) = \sum_{i=1}^N \dot{\vec{p}}_i(t) = \sum_{i=1}^N m_i \ddot{\vec{r}}_i(t) = M \underbrace{\frac{1}{M} \sum_{i=1}^N m_i \ddot{\vec{r}}_i(t)}_{=\ddot{\vec{r}}_{CM}(t)} = M \ddot{\vec{a}}_{CM}(t)$$

De plus,

$$\sum_{i=1}^N \vec{F}_{res/i} = \sum_{i=1}^N \left(\vec{F}_{res\ ext/i} + \sum_{j=1, j \neq i}^N \vec{F}_{j/i} \right) = \underbrace{\sum_{i=1}^N \vec{F}_{res\ ext/i}}_{=\vec{F}_{res\ ext}} + \underbrace{\sum_{i=1}^N \sum_{j=1, j \neq i}^N \vec{F}_{j/i}}_{=\vec{0}} = \vec{F}_{res\ ext}$$

où $\vec{F}_{res\ ext}$ désigne la résultante de toutes les forces extérieures agissant sur le système S . La deuxième somme est nulle en raison de la troisième Loi de Newton (action=réaction):

$$\vec{F}_{j/i} = -\vec{F}_{i/j}$$

Il suit de ce qui précède

$$\boxed{\vec{F}_{res\ ext}(t) = M \ddot{\vec{a}}_{CM}(t)}$$

Par conséquent, le mouvement du centre de masse d'un corps étendu S correspond à celui d'un point matériel dont la masse est celle du corps S et sur lequel une force égale à la résultante de toutes les forces extérieures est appliquée.

2.2. Théorème du moment cinétique.

Pour chaque masse ponctuelle, on a

$$\dot{\vec{L}}_i(t) = \vec{M}_{\vec{F}_{res/i}}(t) = \vec{r}_i(t) \times \vec{F}_{res/i}(t)$$

Il suit que

$$\sum_{i=1}^N \dot{\vec{L}}_i(t) = \sum_{i=1}^N \vec{r}_i(t) \times \vec{F}_{res/i}(t)$$

De plus,

$$\sum_{i=1}^N \vec{r}_i \times \vec{F}_{res/i} = \sum_{i=1}^N \vec{r}_i \times \left(\vec{F}_{res\ ext/i} + \sum_{j=1, j \neq i}^N \vec{F}_{j/i} \right) = \underbrace{\sum_{i=1}^N \vec{r}_i \times \vec{F}_{res\ ext/i}}_{=\vec{M}_{res\ ext}} + \underbrace{\sum_{i=1}^N \sum_{j=1, j \neq i}^N \vec{r}_i \times \vec{F}_{j/i}}_{=\vec{0}} = \vec{M}_{res\ ext}$$

où $\vec{M}_{res\ ext}$ désigne la somme de tous les moments, calculés par rapport à l'origine du référentiel R , de toutes les forces extérieures agissant sur le système de particules S . Par la troisième Loi de Newton (action=réaction), la deuxième somme est nulle:

$$\vec{r}_i \times \vec{F}_{j/i} + \vec{r}_j \times \vec{F}_{i/j} = \vec{r}_i \times \vec{F}_{j/i} - \vec{r}_j \times \vec{F}_{j/i} = (\vec{r}_i - \vec{r}_j) \times \vec{F}_{j/i} = \vec{0}$$

car $\vec{F}_{j/i}$ et $\vec{r}_i - \vec{r}_j$ sont colinéaires (flèches parallèles).

Par ailleurs, en vertu de la règle de dérivation d'une somme,

$$\sum_{i=1}^N \dot{\vec{L}}_i(t) = \frac{d}{dt} \left(\sum_{i=1}^N \vec{L}_i \right) (t) = \dot{\vec{L}}_{tot}$$

Il suit de ce qui précède que

$$\boxed{\dot{\vec{L}}_{tot}(t) = \vec{M}_{res\ ext}(t)}$$

Le théorème du moment cinétique reste valable pour un système de particules.

2.3. Décomposition du moment cinétique.

Notons $\vec{s}_i(t)$ la position au temps t de la masse m_i relativement au centre de masse. Par conséquent, dans le référentiel du laboratoire, la position de la masse m_i est donnée par

$$\vec{r}_i(t) = \vec{r}_{CM}(t) + \vec{s}_i(t)$$

Il suit que

$$\vec{v}_i(t) = \dot{\vec{r}}_i(t) = \vec{v}_{CM}(t) + \dot{\vec{s}}_i(t)$$

et

$$\begin{aligned} \vec{r}_i(t) \times \vec{v}_i(t) &= \left(\vec{r}_{CM}(t) + \vec{s}_i(t) \right) \times \left(\vec{v}_{CM}(t) + \dot{\vec{s}}_i(t) \right) = \vec{r}_{CM}(t) \times \vec{v}_{CM}(t) + \vec{s}_i(t) \times \dot{\vec{s}}_i(t) \\ &\quad + \vec{r}_{CM}(t) \times \dot{\vec{s}}_i(t) + \vec{s}_i(t) \times \vec{v}_{CM}(t) \end{aligned}$$

Remarquons que

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^N m_i \vec{s}_i(t) &= \sum_{i=1}^N m_i (\vec{r}_i(t) - \vec{r}_{CM}(t)) = \underbrace{\sum_{i=1}^N m_i \vec{r}_i(t)}_{=M\vec{r}_{CM}(t)} - \sum_{i=1}^N m_i \vec{r}_{CM}(t) \\ &= M\vec{r}_{CM}(t) - \vec{r}_{CM}(t) \left(\sum_{i=1}^N m_i \right) = \vec{0} \end{aligned}$$

Par conséquent,

$$\begin{aligned}
 \vec{L}_{tot} &= \sum_{i=1}^N \vec{L}_i = \sum_{i=1}^N m_i \left(\vec{r}_i(t) \times \vec{v}_i(t) \right) \\
 &= \sum_{i=1}^N m_i \left(\vec{r}_{CM}(t) \times \vec{v}_{CM}(t) + \vec{s}_i(t) \times \dot{\vec{s}}_i(t) + \vec{r}_{CM}(t) \times \dot{\vec{s}}_i(t) + \vec{s}_i(t) \times \vec{v}_{CM}(t) \right) \\
 &= \sum_{i=1}^N m_i \left(\vec{r}_{CM}(t) \times \vec{v}_{CM}(t) \right) + \sum_{i=1}^N m_i \left(\vec{s}_i(t) \times \dot{\vec{s}}_i(t) \right) \\
 &\quad + \sum_{i=1}^N m_i \left(\vec{r}_{CM}(t) \times \dot{\vec{s}}_i(t) \right) + \sum_{i=1}^N m_i \left(\vec{s}_i(t) \times \vec{v}_{CM}(t) \right) \\
 &= \left(\vec{r}_{CM}(t) \times \vec{v}_{CM}(t) \right) \underbrace{\left(\sum_{i=1}^N m_i \right)}_{=M} + \sum_{i=1}^N m_i \left(\vec{s}_i(t) \times \dot{\vec{s}}_i(t) \right) \\
 &\quad + \vec{r}_{CM}(t) \times \left(\sum_{i=1}^N m_i \dot{\vec{s}}_i(t) \right) + \underbrace{\left(\sum_{i=1}^N m_i \vec{s}_i(t) \right)}_{=\vec{0}} \times \vec{v}_{CM}(t) \\
 &= \vec{r}_{CM}(t) \times (M \vec{v}_{CM}(t)) + \sum_{i=1}^N m_i \left(\vec{s}_i(t) \times \dot{\vec{s}}_i(t) \right) + \vec{r}_{CM}(t) \times \underbrace{\frac{d}{dt} \left(\sum_{i=1}^N m_i \vec{s}_i(t) \right)}_{=\vec{0}} \\
 &= \vec{r}_{CM}(t) \times (M \vec{v}_{CM}(t)) + \sum_{i=1}^N m_i \left(\vec{s}_i(t) \times \dot{\vec{s}}_i(t) \right)
 \end{aligned}$$

En résumé, nous trouvons que

$$\boxed{\vec{L}_{tot} = \vec{r}_{CM}(t) \times (M \vec{v}_{CM}(t)) + \vec{L}_{tot\,CM}}$$

avec

$$\boxed{\vec{L}_{tot\,CM} = \sum_{i=1}^N m_i \left(\vec{s}_i(t) \times \dot{\vec{s}}_i(t) \right)}$$

Ce résultat est connu sous le nom de **décomposition de König** ou **premier théorème de König**.

2.4. Décomposition du moment de force.

Par définition

$$\begin{aligned}
 \vec{M}_{\text{res ext}} &= \sum_{i=1}^N \vec{r}_i \times \vec{F}_{\text{res ext}/i} = \sum_{i=1}^N (\vec{r}_{CM} + \vec{s}_i) \times \vec{F}_{\text{res ext}/i} \\
 &= \sum_{i=1}^N \vec{r}_{CM} \times \vec{F}_{\text{res ext}/i} + \sum_{i=1}^N \vec{s}_i \times \vec{F}_{\text{res ext}/i} = \vec{r}_{CM} \times \underbrace{\left(\sum_{i=1}^N \vec{F}_{\text{res ext}/i} \right)}_{=\vec{F}_{\text{res ext}/S}} + \underbrace{\sum_{i=1}^N \vec{s}_i \times \vec{F}_{\text{res ext}/i}}_{=:\vec{M}_{\text{res ext } CM}} \\
 &= \vec{r}_{CM} \times \vec{F}_{\text{res ext}/S} + \vec{M}_{\text{res ext } CM}
 \end{aligned}$$

où $\vec{M}_{\text{res ext } CM}$, est par définition, la somme de tous les moments, calculés par rapport au centre de masse, de toutes les forces extérieures agissant sur le système de particules S .

Remarquons que

$$\begin{aligned}
 \dot{\vec{L}}_{\text{tot}}(t) &= \underbrace{\dot{\vec{r}}_{CM}(t) \times (M\vec{v}_{CM}(t))}_{=\vec{0}} + \vec{r}_{CM}(t) \times \underbrace{(M\vec{a}_{CM}(t))}_{=\vec{F}_{\text{res ext}/S}} + \dot{\vec{L}}_{\text{tot } CM}(t)
 \end{aligned}$$

Par conséquent, en vertu du théorème du moment cinétique et de ce qui précède, il suit que

$$\boxed{\dot{\vec{L}}_{\text{tot } CM}(t) = \vec{M}_{\text{res ext } CM}(t)}$$

2.5. Décomposition de l'énergie cinétique.

L'énergie cinétique totale du système S est donnée par

$$\begin{aligned}
 E_{\text{cin tot}} &= \sum_{i=1}^N \frac{1}{2} m_i \|\vec{v}_i(t)\|^2 \\
 &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N m_i \left(\dot{\vec{r}}_i(t) \bullet \dot{\vec{r}}_i(t) \right) \\
 &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N m_i \left(\dot{\vec{r}}_{CM}(t) + \dot{\vec{s}}_i(t) \right) \bullet \left(\dot{\vec{r}}_{CM}(t) + \dot{\vec{s}}_i(t) \right)
 \end{aligned}$$

Par conséquent,

$$\begin{aligned}
 E_{\text{cin tot}} &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N m_i \left(\|\dot{\vec{r}}_{CM}(t)\|^2 + \|\dot{\vec{s}}_i(t)\|^2 + 2\dot{\vec{s}}_i(t) \bullet \dot{\vec{r}}_{CM}(t) \right) \\
 &= \frac{1}{2} \underbrace{\left(\sum_{i=1}^N m_i \right)}_{=M} \|\dot{\vec{r}}_{CM}(t)\|^2 + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N m_i \|\dot{\vec{s}}_i(t)\|^2 + \left(\sum_{i=1}^N m_i \dot{\vec{s}}_i(t) \right) \bullet \dot{\vec{r}}_{CM}(t)
 \end{aligned}$$

Et finalement,

$$\begin{aligned}
 E_{cin\ tot} &= \frac{1}{2}M\|\dot{\vec{r}}_{CM}(t)\|^2 + \sum_{i=1}^N \frac{1}{2}m_i\|\dot{\vec{s}}_i(t)\|^2 + \underbrace{\frac{d}{dt}\left(\sum_{i=1}^N m_i\vec{s}_i(t)\right)}_{=\vec{0}} \bullet \dot{\vec{r}}_{CM}(t) \\
 &= \frac{1}{2}M\|\dot{\vec{r}}_{CM}(t)\|^2 + \sum_{i=1}^N \frac{1}{2}m_i\|\dot{\vec{s}}_i(t)\|^2
 \end{aligned}$$

En résumé, l'énergie cinétique totale du système S est donnée par

$$\boxed{E_{cin\ tot} = E_{cin\ CM} + E'_{cin\ tot}} \text{ avec } \boxed{E_{cin\ CM} = \frac{1}{2}M\|\vec{v}_{CM}(t)\|^2} \text{ et } \boxed{E'_{cin\ tot} = \sum_{i=1}^N \frac{1}{2}m_i\|\dot{\vec{s}}_i(t)\|^2}$$

c'est-à-dire, l'énergie cinétique du centre de masse plus l'énergie cinétique des particules calculée dans le référentiel du centre de masse.

APPENDICE A

Le corps solide: développements et cas général

1. Cinématique

1.1. Angles de Cardan et angles d'Euler.

En général, il faut $3N$ coordonnées pour décrire la position d'un système de N particules (masses ponctuelles). Pour un corps solide (rigide), comme la distance entre les particules ne change pas, il suffit de donner la position du centre de masse (trois coordonnées) et trois angles qui décrivent la rotation d'un référentiel attaché au centre de masse du corps (trois axes orthogonaux, attachés au solide, dont l'origine coïncide avec le centre de masse). Six paramètres suffisent donc pour décrire complètement la position du solide. On suppose que les axes du référentiel lié au solide sont, au temps $t = 0$, parallèles aux axes du référentiel d'inertie choisi pour décrire le mouvement du corps solide. Rappelons que dans ce référentiel d'inertie, nous notons

$$\vec{r}_j(t) = \vec{r}_{CM}(t) + \vec{s}_j(t)$$

Les trois angles peuvent être par exemple les trois angles φ_x , φ_y et φ_z de trois rotations successives autour des trois axes x , y et z (voir figure 1 haut) ou les angles d'Euler φ , θ et ψ (voir figure 1 bas)

REMARQUE 1.1. Par convention, le sens de la rotation autour d'un axe pour un angle positif est donné par la règle du tire-bouchon ou la règle de la main droite.

Les angles φ_x , φ_y et φ_z sont appelés angles de Cardan. Imaginons un avion se déplaçant le long de l'axe x . Alors l'angle φ_x correspond à l'inclinaison et peut être modifié par les ailerons situés sur les ailes. L'axe des x est appelé l'axe de roulis. L'angle φ_y correspond à l'assiette et peut être modifié par le gouvernail de profondeur sur la queue de l'avion. L'axe des y est appelé l'axe de tangage. Finalement, l'angle φ_z correspond à l'angle de lacet et peut être modifié par le gouvernail de direction sur la queue de l'avion. L'axe des z est appelé l'axe de lacet (voir figure 2).

Considérons les angles d'Euler. Imaginons un avion dont l'axe de roulis correspond à l'axe $\vec{\xi}$. L'angle φ correspond à la longitude de l'axe $\vec{\xi}$ et l'angle θ à la latitude de l'axe $\vec{\xi}$ (avec $\theta = 0$ au pôle Nord). Finalement la variation de l'angle ψ correspond à un mouvement de roulis.

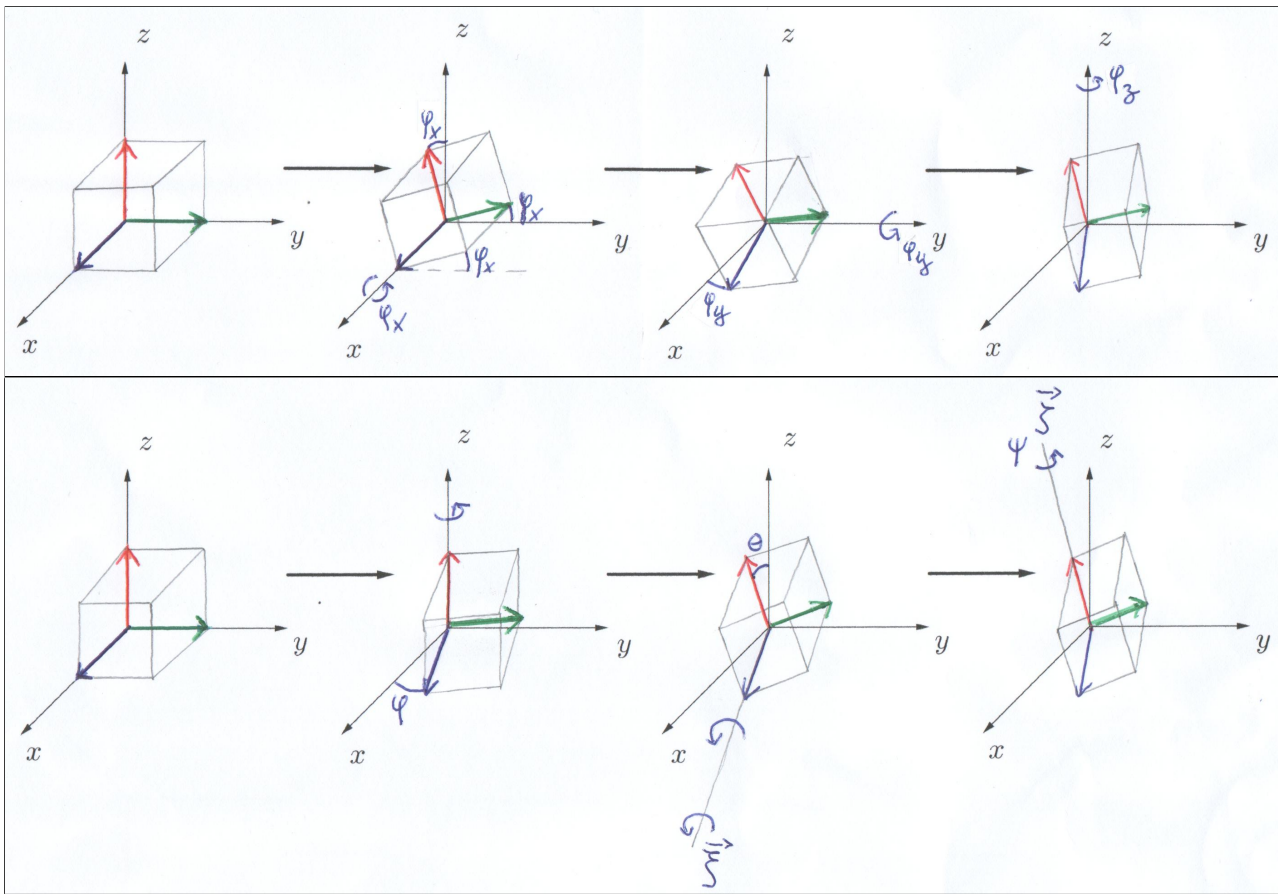
1.2. Rappels d'algèbre linéaire.

Faisons quelques rappels d'algèbre linéaire. Soit $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ une application linéaire, c'est-à-dire une application telle que

$$f(\vec{v} + \vec{w}) = f(\vec{v}) + f(\vec{w}) \text{ et } f(\lambda \vec{v}) = \lambda f(\vec{v}), \forall \vec{v}, \vec{w} \in \mathbb{R}^3, \forall \lambda \in \mathbb{R}$$

La matrice associée à f (relativement à la base canonique $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$) est définie par

$$A_f = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

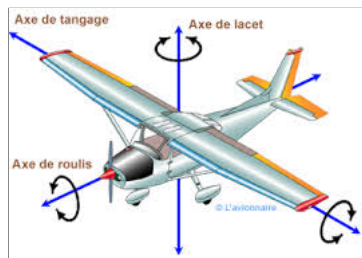
FIGURE 1. Rotations autour des trois axes x , y et z (haut) et angles d'Euler (bas).

où les nombres a_{ij} sont définis par

$$f(\vec{e}_j) = a_{1j}\vec{e}_1 + a_{2j}\vec{e}_2 + a_{3j}\vec{e}_3$$

En mots, la j -ème colonne de A_f contient les coefficients du développement $f(\vec{e}_j)$ relativement à la base canonique. L'image d'un vecteur $\vec{x} = x_1\vec{e}_1 + x_2\vec{e}_2 + x_3\vec{e}_3$ est donnée par

$$f(\vec{x}) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

FIGURE 2. Roulis, tangage et lacet. (Image: <http://www.lavionnaire.fr>)

De plus, si g est une application linéaire, alors

$$A_{f \circ g} = A_f A_g$$

le produit matriciel des matrices A_f et A_g :

$$(A_f A_g)_{ij} = \sum_{k=1}^3 (A_f)_{ik} (A_g)_{kj}$$

Finalement, rappelons que la matrice de l'identité est donnée par

$$A_{\text{Id}} = \text{Id} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Par conséquent,

$$A_f A_f^{-1} = \text{Id}$$

où A_f^{-1} est la matrice de la réciproque de f .

1.3. Rotation $R_x(\varphi_x)$.

Décrivons mathématiquement la rotation $R_x(\varphi_x)$ d'angle φ_x autour de l'axe des x . Notons

$$\vec{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{e}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Ces vecteurs forment une base de $\mathbb{R}^3$ appelée la **base canonique**. Après la rotation, les vecteurs $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$ et $\vec{e}_3$ seront donnés par

$$\vec{e}_1 \xrightarrow{R_x(\varphi_x)} \vec{e}_1' = \vec{e}_1$$

$$\vec{e}_2 \xrightarrow{R_x(\varphi_x)} \vec{e}_2' = \begin{pmatrix} 0 \\ \cos(\varphi_x) \\ \sin(\varphi_x) \end{pmatrix}$$

$$\vec{e}_3 \xrightarrow{R_x(\varphi_x)} \vec{e}_3' = \begin{pmatrix} 0 \\ -\sin(\varphi_x) \\ \cos(\varphi_x) \end{pmatrix}$$

En utilisant les matrices, il vient

$$\vec{e}_j' = R_x(\varphi_x) \vec{e}_j = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\varphi_x) & -\sin(\varphi_x) \\ 0 & \sin(\varphi_x) & \cos(\varphi_x) \end{pmatrix} \vec{e}_j$$

où l'opération entre la matrice et le vecteur est la multiplication matricielle (lignes-colonnes).

De façon similaire, nous trouvons que

$$R_y(\varphi_y) = \begin{pmatrix} \cos(\varphi_y) & 0 & \sin(\varphi_y) \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin(\varphi_y) & 0 & \cos(\varphi_y) \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad R_z(\varphi_z) = \begin{pmatrix} \cos(\varphi_z) & -\sin(\varphi_z) & 0 \\ \sin(\varphi_z) & \cos(\varphi_z) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

1.4. Dérivée de $R_x(\varphi_x(t))$.

Revenons à l'étude des rotations. Remarquons que

$$R_x(-\varphi_x) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(-\varphi_x) & -\sin(-\varphi_x) \\ 0 & \sin(-\varphi_x) & \cos(-\varphi_x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\varphi_x) & \sin(\varphi_x) \\ 0 & -\sin(\varphi_x) & \cos(\varphi_x) \end{pmatrix}$$

Par conséquent,

$$R_x(-\varphi_x)R_x(\varphi_x) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\varphi_x) & \sin(\varphi_x) \\ 0 & -\sin(\varphi_x) & \cos(\varphi_x) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\varphi_x) & -\sin(\varphi_x) \\ 0 & \sin(\varphi_x) & \cos(\varphi_x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Si l'angle φ_x est une fonction $\varphi_x(t)$ qui dépend du temps, alors

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}R_x(\varphi_x(t)) &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\sin(\varphi_x(t))\dot{\varphi}_x(t) & -\cos(\varphi_x(t))\dot{\varphi}_x(t) \\ 0 & \cos(\varphi_x(t))\dot{\varphi}_x(t) & -\sin(\varphi_x(t))\dot{\varphi}_x(t) \end{pmatrix} = \dot{\varphi}_x(t) \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\sin(\varphi_x(t)) & -\cos(\varphi_x(t)) \\ 0 & \cos(\varphi_x(t)) & -\sin(\varphi_x(t)) \end{pmatrix} \\ &= \dot{\varphi}_x(t) \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\sin(\varphi_x(t)) & -\cos(\varphi_x(t)) \\ 0 & \cos(\varphi_x(t)) & -\sin(\varphi_x(t)) \end{pmatrix} R_x(-\varphi_x(t))R_x(\varphi_x(t)) \\ &= \dot{\varphi}_x(t) \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\sin(\varphi_x(t)) & -\cos(\varphi_x(t)) \\ 0 & \cos(\varphi_x(t)) & -\sin(\varphi_x(t)) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\varphi_x(t)) & \sin(\varphi_x(t)) \\ 0 & -\sin(\varphi_x(t)) & \cos(\varphi_x(t)) \end{pmatrix}}_{= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}} R_x(\varphi_x(t)) \\ &= \dot{\varphi}_x(t) \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} R_x(\varphi_x(t)) \end{aligned}$$

Remarquons que pour $\vec{r} = (x_1, x_2, x_3)$, il vient

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -x_3 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \vec{e}_1 \times \vec{r}$$

Par conséquent, il suit

$$\vec{s}(t) = R_x(\varphi_x(t))\vec{s}_0 \Rightarrow \dot{\vec{s}}(t) = \left(\frac{d}{dt}R_x(\varphi_x(t)) \right) \vec{s}_0 = \dot{\varphi}_x(t) (\vec{e}_1 \times R_x(\varphi_x(t))\vec{s}_0) = (\dot{\varphi}_x(t)\vec{e}_1) \times \vec{s}(t)$$

En notant

$$\vec{\omega}_R(t) = \dot{\varphi}_x(t) \vec{e}_1$$

il vient

$$\vec{s}(t) = R_x(\varphi_x(t)) \vec{s}_0 \Rightarrow \boxed{\dot{\vec{s}}(t) = \vec{\omega}_R(t) \times \vec{s}(t)}$$

Le vecteur $\vec{\omega}_R(t)$ est appelé la **vitesse angulaire**. Remarquons que sa longueur est égale (au signe près) à la vitesse angulaire $\dot{\varphi}_x(t)$:

$$\|\vec{\omega}_R(t)\| = |\dot{\varphi}_x(t)|$$

De manière similaire, nous trouvons que

$$\vec{s}(t) = R_y(\varphi_y(t)) \vec{s}_0 \Rightarrow \dot{\vec{s}}(t) = (\dot{\varphi}_y(t) \vec{e}_2) \times \vec{s}(t)$$

$$\vec{s}(t) = R_z(\varphi_z(t)) \vec{s}_0 \Rightarrow \dot{\vec{s}}(t) = (\dot{\varphi}_z(t) \vec{e}_3) \times \vec{s}(t)$$

Remarquons que

$$\dot{\varphi}_x(t) \vec{e}_1 = \begin{pmatrix} \dot{\varphi}_x(t) \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \dot{\varphi}_y(t) \vec{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ \dot{\varphi}_y(t) \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \dot{\varphi}_z(t) \vec{e}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\varphi}_z(t) \end{pmatrix},$$

1.5. Rotation autour d'un axe fixe quelconque.

Considérons comme cas particulier une rotation d'angle $\theta(t)$ autour d'un axe $\vec{d} = R \vec{e}_1$ qui ne varie pas au cours du temps. R est une rotation qui envoie le vecteur de la base canonique $\vec{e}_1$ sur le vecteur $\vec{d}$ (NB: $\|\vec{d}\| = 1$). Alors

$$R_{\vec{d}}(\theta(t)) = R R_x(\theta(t)) R^{-1}$$

Remarquons que pour une rotation R ,

$$R(\vec{a} \times \vec{b}) = (R\vec{a}) \times (R\vec{b})$$

car une rotation préserve les normes des vecteurs $\vec{a}$ et $\vec{b}$ ainsi que l'angle entre les vecteurs $\vec{a}$ et $\vec{b}$. Par conséquent,

$$\begin{aligned} \vec{s}(t) &= R_{\vec{d}}(\theta(t)) \vec{s}_0 \\ \Rightarrow \dot{\vec{s}}(t) &= R \left(\frac{d}{dt} R_x(\theta(t)) \right) R^{-1} \vec{s}_0 = R \left(\left(\dot{\theta}(t) \vec{e}_1 \right) \times \left(R_x(\theta(t)) R^{-1} \vec{s}_0 \right) \right) \\ &= \dot{\theta}(t) \left(\underbrace{\left(R \vec{e}_1 \right)}_{=\vec{d}} \times \underbrace{\left(R R_x(\theta(t)) R^{-1} \vec{s}_0 \right)}_{=\vec{s}(t)} \right) = \left(\dot{\theta}(t) \vec{d} \right) \times \vec{s}(t) \end{aligned}$$

Généralement, on note

$$\vec{\omega}_R(t) = \dot{\theta}(t) \vec{d}$$

Par conséquent, dans le référentiel d'inertie R

$$\boxed{\dot{\vec{s}}(t) = \vec{\omega}_R(t) \times \vec{s}(t)} \text{ avec } \boxed{\vec{\omega}_R(t) = \dot{\theta}(t)\vec{d}}$$

1.6. Cas général.

Dans le cas général, on a (voir figure 1, page 36)

$$\vec{s}(t) = R_z(\varphi_z(t)) R_y(\varphi_y(t)) R_x(\varphi_x(t)) \vec{s}_0$$

Remarquons qu'en effectuant deux rotations successives on obtient une rotation qui dépend de l'ordre dans lequel on effectue ces rotations. En d'autres termes, en général, les matrices des rotations ne commutent pas (sauf si, par exemple, un des angles est nul !). Par exemple,

$$R_x(\varphi_x) R_y(\varphi_y) \neq R_y(\varphi_y) R_x(\varphi_x)$$

Rappelons que pour une rotation R et des vecteurs $\vec{a}$ et $\vec{b}$ on a

$$R(\vec{a} \times \vec{b}) = (R\vec{a}) \times (R\vec{b})$$

Par conséquent, en vertu de la règle de dérivation d'un produit, il vient

$$\begin{aligned} \dot{\vec{s}}(t) &= \left(\frac{d}{dt} R_z(\varphi_z(t)) \right) R_y(\varphi_y(t)) R_x(\varphi_x(t)) \vec{s}_0 \\ &\quad + R_z(\varphi_z(t)) \left(\frac{d}{dt} R_y(\varphi_y(t)) \right) R_x(\varphi_x(t)) \vec{s}_0 + R_z(\varphi_z(t)) R_y(\varphi_y(t)) \left(\frac{d}{dt} R_x(\varphi_x(t)) \vec{s}_0 \right) \\ &= (\dot{\varphi}_z(t) \vec{e}_3) \times \underbrace{R_z(\varphi_z(t)) R_y(\varphi_y(t)) R_x(\varphi_x(t)) \vec{s}_0}_{\vec{s}(t)} \\ &\quad + \underbrace{R_z(\varphi_z(t))}_{\vec{s}(t)} \left(\left(\dot{\varphi}_y(t) \vec{e}_2 \right) \times (R_y(\varphi_y(t)) R_x(\varphi_x(t)) \vec{s}_0) \right) \\ &\quad + \underbrace{\left[R_z(\varphi_z(t)) R_y(\varphi_y(t)) \right]}_{\vec{s}(t)} \left(\left(\dot{\varphi}_x(t) \vec{e}_1 \right) \times (R_x(\varphi_x(t)) \vec{s}_0) \right) \\ &= \left(\dot{\varphi}_z(t) \vec{e}_3 \right) \times \vec{s}(t) + \left(\dot{\varphi}_y(t) \underbrace{R_z(\varphi_z(t)) \vec{e}_2}_{\vec{s}(t)} \right) \times \underbrace{\left(\underbrace{R_z(\varphi_z(t)) R_y(\varphi_y(t)) R_x(\varphi_x(t)) \vec{s}_0}_{\vec{s}(t)} \right)}_{\vec{s}(t)} \\ &\quad + \left(\dot{\varphi}_x(t) \underbrace{\left[R_z(\varphi_z(t)) R_y(\varphi_y(t)) \right] \vec{e}_1}_{\vec{s}(t)} \right) \times \underbrace{\left(\underbrace{\left[R_z(\varphi_z(t)) R_y(\varphi_y(t)) \right] R_x(\varphi_x(t)) \vec{s}_0}_{\vec{s}(t)} \right)}_{\vec{s}(t)} \\ &= \underbrace{\left(\dot{\varphi}_z(t) \vec{e}_3 + \dot{\varphi}_y(t) R_z(\varphi_z(t)) \vec{e}_2 + \dot{\varphi}_x(t) R_z(\varphi_z(t)) R_y(\varphi_y(t)) \vec{e}_1 \right)}_{=:\vec{\omega}_R(t)} \times \vec{s}(t) \end{aligned}$$

En définissant le vecteur $\vec{\omega}_R(t)$ comme ci-dessus, on trouve à nouveau

$$\dot{\vec{s}}(t) = \vec{\omega}_R(t) \times \vec{s}(t)$$

Explicitement, on trouve dans le référentiel R

$$\begin{aligned} \vec{\omega}_R(t) &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\varphi}_z(t) \end{pmatrix} + \dot{\varphi}_y(t) \begin{pmatrix} \cos(\varphi_z(t)) & -\sin(\varphi_z(t)) & 0 \\ \sin(\varphi_z(t)) & \cos(\varphi_z(t)) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &+ \dot{\varphi}_x(t) \begin{pmatrix} \cos(\varphi_z(t)) & -\sin(\varphi_z(t)) & 0 \\ \sin(\varphi_z(t)) & \cos(\varphi_z(t)) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos(\varphi_y(t)) & 0 & \sin(\varphi_y(t)) \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin(\varphi_y(t)) & 0 & \cos(\varphi_y(t)) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\varphi}_z(t) \end{pmatrix} + \dot{\varphi}_y(t) \begin{pmatrix} -\sin(\varphi_z(t)) \\ \cos(\varphi_z(t)) \\ 0 \end{pmatrix} \\ &+ \dot{\varphi}_x(t) \begin{pmatrix} \cos(\varphi_z(t)) & -\sin(\varphi_z(t)) & 0 \\ \sin(\varphi_z(t)) & \cos(\varphi_z(t)) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos(\varphi_y(t)) \\ 0 \\ -\sin(\varphi_y(t)) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -\dot{\varphi}_y(t) \sin(\varphi_z(t)) \\ \dot{\varphi}_y(t) \cos(\varphi_z(t)) \\ \dot{\varphi}_z(t) \end{pmatrix} + \dot{\varphi}_x(t) \begin{pmatrix} \cos(\varphi_z(t)) \cos(\varphi_y(t)) \\ \sin(\varphi_z(t)) \cos(\varphi_y(t)) \\ -\sin(\varphi_y(t)) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -\dot{\varphi}_y(t) \sin(\varphi_z(t)) + \dot{\varphi}_x(t) \cos(\varphi_z(t)) \cos(\varphi_y(t)) \\ \dot{\varphi}_y(t) \cos(\varphi_z(t)) + \dot{\varphi}_x(t) \sin(\varphi_z(t)) \cos(\varphi_y(t)) \\ \dot{\varphi}_z(t) - \dot{\varphi}_x(t) \sin(\varphi_y(t)) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

1.7. Angles d'Euler.

Pour les angles d'Euler, les trois rotations successives donnent (voir figure 1, page 36)

$$\vec{s} = R_{\vec{\zeta}}(\psi) R_{\vec{\xi}}(\theta) R_z(\varphi) \vec{s}_0$$

Or

$$R_{\vec{\xi}}(\theta) = R_z(\varphi) R_x(\theta) R_z(-\varphi)$$

et

$$R_{\vec{\zeta}}(\psi) = R_{\vec{\xi}}(\theta) R_z(\psi) R_{\vec{\xi}}(-\theta)$$

Rappelons que pour une rotation $R(\alpha)$,

$$R(\alpha)^{-1} = R(-\alpha) \text{ et donc } R(-\alpha)R(\alpha) = \text{Id} = R(\alpha)R(-\alpha)$$

De plus, si des rotations se font autour d'un même axe, alors elles commutent:

$$R_{\vec{\eta}}(\alpha) R_{\vec{\eta}}(\beta) = R_{\vec{\eta}}(\beta) R_{\vec{\eta}}(\alpha)$$

Par conséquent, il vient

$$\begin{aligned} R_{\vec{\zeta}}(\psi) &= R_{\vec{\xi}}(\theta) R_z(\psi) R_{\vec{\xi}}(-\theta) = R_z(\varphi) R_x(\theta) \underbrace{R_z(-\varphi) R_z(\psi) R_z(\varphi)}_{=R_z(-\varphi) R_z(\varphi) R_z(\psi)=R_z(\psi)} R_x(-\theta) R_z(-\varphi) \\ &= R_z(\varphi) R_x(\theta) R_z(\psi) R_x(-\theta) R_z(-\varphi) \end{aligned}$$

et ainsi

$$\begin{aligned} R_{\vec{\zeta}}(\psi) R_{\vec{\xi}}(\theta) R_z(\varphi) &= R_z(\varphi) R_x(\theta) R_z(\psi) R_x(-\theta) \underbrace{R_z(-\varphi) R_z(\varphi)}_{=\text{Id}} R_x(\theta) \underbrace{R_z(-\varphi) R_z(\varphi)}_{=\text{Id}} \\ &= R_z(\varphi) R_x(\theta) R_z(\psi) \underbrace{R_x(-\theta) R_x(\theta)}_{=\text{Id}} = R_z(\varphi) R_x(\theta) R_z(\psi) \end{aligned}$$

Notons

$$\vec{s}(t) = R_z(\varphi(t)) R_x(\theta(t)) R_z(\psi(t)) \vec{s}_0$$

Alors

$$\begin{aligned} \dot{\vec{s}}(t) &= \left(\frac{d}{dt} R_z(\varphi(t)) \right) R_x(\theta(t)) R_z(\psi(t)) \vec{s}_0 \\ &\quad + R_z(\varphi(t)) \left(\frac{d}{dt} R_x(\theta(t)) \right) R_z(\psi(t)) \vec{s}_0 + R_z(\varphi(t)) R_x(\theta(t)) \left(\frac{d}{dt} R_z(\psi(t)) \right) \vec{s}_0 \\ &= (\dot{\varphi}(t) \vec{e}_3) \times \underbrace{R_z(\varphi(t)) R_x(\theta(t)) R_z(\psi(t)) \vec{s}_0}_{\vec{s}(t)} \\ &\quad + \underline{R_z(\varphi(t))} \left(\left(\dot{\theta}(t) \vec{e}_1 \right) \times (R_x(\theta(t)) R_z(\psi(t)) \vec{s}_0) \right) \\ &\quad + \boxed{R_z(\varphi(t)) R_x(\theta(t))} \left(\left(\dot{\psi}(t) \vec{e}_3 \right) \times (R_z(\psi(t)) \vec{s}_0) \right) \\ &= \left(\dot{\varphi}(t) \vec{e}_3 \right) \times \vec{s}(t) + \left(\dot{\theta}(t) \underline{R_z(\varphi(t))} \vec{e}_1 \right) \times \underbrace{\left(R_z(\varphi(t)) R_x(\theta(t)) R_z(\psi(t)) \vec{s}_0 \right)}_{\vec{s}(t)} \\ &\quad + \left(\dot{\psi}(t) \boxed{R_z(\varphi(t)) R_x(\theta(t))} \vec{e}_3 \right) \times \underbrace{\left(R_z(\varphi(t)) R_x(\theta(t)) R_z(\psi(t)) \vec{s}_0 \right)}_{\vec{s}(t)} \\ &= \underbrace{\left(\dot{\varphi}(t) \vec{e}_3 + \dot{\theta}(t) R_z(\varphi(t)) \vec{e}_1 + \dot{\psi}(t) R_z(\varphi(t)) R_x(\theta(t)) \vec{e}_3 \right)}_{=:\vec{\omega}_R(t)} \times \vec{s}(t) \end{aligned}$$

Explicitement, on trouve dans le référentiel R

$$\begin{aligned}
 \vec{\omega}_R(t) &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\varphi}(t) \end{pmatrix} + \dot{\theta}(t) \begin{pmatrix} \cos(\varphi(t)) & -\sin(\varphi(t)) & 0 \\ \sin(\varphi(t)) & \cos(\varphi(t)) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\
 &+ \dot{\psi}(t) \begin{pmatrix} \cos(\varphi(t)) & -\sin(\varphi(t)) & 0 \\ \sin(\varphi(t)) & \cos(\varphi(t)) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\theta(t)) & -\sin(\theta(t)) \\ 0 & \sin(\theta(t)) & \cos(\theta(t)) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\varphi}(t) \end{pmatrix} + \dot{\theta}(t) \begin{pmatrix} \cos(\varphi(t)) \\ \sin(\varphi(t)) \\ 0 \end{pmatrix} \\
 &+ \dot{\psi}(t) \begin{pmatrix} \cos(\varphi(t)) & -\sin(\varphi(t)) & 0 \\ \sin(\varphi(t)) & \cos(\varphi(t)) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ -\sin(\theta(t)) \\ \cos(\theta(t)) \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} \dot{\theta}(t) \cos(\varphi(t)) \\ \dot{\theta}(t) \sin(\varphi(t)) \\ \dot{\varphi}(t) \end{pmatrix} + \dot{\psi}(t) \begin{pmatrix} \sin(\varphi(t)) \sin(\theta(t)) \\ -\cos(\varphi(t)) \sin(\theta(t)) \\ \cos(\theta(t)) \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} \dot{\theta}(t) \cos(\varphi(t)) + \dot{\psi}(t) \sin(\varphi(t)) \sin(\theta(t)) \\ \dot{\theta}(t) \sin(\varphi(t)) - \dot{\psi}(t) \cos(\varphi(t)) \sin(\theta(t)) \\ \dot{\varphi}(t) + \dot{\psi}(t) \cos(\theta(t)) \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

1.8. Repère lié au solide.

Notons $R(t)$ la rotation considérée ci-dessus:

$$R(t) = R_z(\varphi(t))R_x(\theta(t))R_z(\psi(t))$$

Notons

$$\vec{f}_1(t) = R(t)\vec{e}_1, \quad \vec{f}_2(t) = R(t)\vec{e}_2, \quad \vec{f}_3(t) = R(t)\vec{e}_3$$

Rappelons qu'une rotation ne change pas l'angle entre deux vecteurs, par conséquent, elle préserve le produit scalaire

$$\left(R(t)\vec{a}\right) \bullet \left(R(t)\vec{b}\right) = \vec{a} \bullet \vec{b}$$

En particulier, une rotation ne change pas la norme des vecteurs et pour tout temps t ,

$$\|\vec{f}_1(t)\| = \|\vec{f}_2(t)\| = \|\vec{f}_3(t)\| = 1 \text{ et } \vec{f}_1(t) \bullet \vec{f}_2(t) = \vec{f}_1(t) \bullet \vec{f}_3(t) = \vec{f}_2(t) \bullet \vec{f}_3(t) = 0 \text{ et}$$

$$\vec{f}_3(t) = R(t)\vec{e}_3 = R(t)(\vec{e}_1 \times \vec{e}_2) = (R(t)\vec{e}_1) \times (R(t)\vec{e}_2) = \vec{f}_1(t) \times \vec{f}_2(t)$$

Par conséquent, pour tout t , les vecteurs $\vec{f}_1(t)$, $\vec{f}_2(t)$ et $\vec{f}_3(t)$ forment une base orthonormée de $\mathbb{R}^3$ que nous notons $\mathcal{F}_t$:

$$\mathcal{F}_t = \left(\vec{f}_1(t), \vec{f}_2(t), \vec{f}_3(t)\right)$$

Les vecteurs $\vec{f}_1(t)$, $\vec{f}_2(t)$ et $\vec{f}_3(t)$ peuvent être représentés par trois flèches perpendiculaires entre elles de longueur 1 tournant avec le solide et attachées au centre de masse du solide. Elles définissent donc un système d'axes lié au solide que nous appellerons **repère lié au solide**.

Soit $\vec{a}$ un vecteur dont les composantes dans le référentiel R sont

$$\vec{a}_R = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = a_1 \vec{e}_1 + a_2 \vec{e}_2 + a_3 \vec{e}_3$$

Que valent les composantes du vecteur $\vec{a}$ dans le repère lié au solide (*i.e.* relativement à la base $\mathcal{F}_t$) ? Notons les composantes de $\vec{a}$ dans le repère lié au solide par

$$\vec{a}_S = \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \end{pmatrix}$$

Alors

$$\begin{aligned} \vec{a} &= A_1 \vec{f}_1(t) + A_2 \vec{f}_2(t) + A_3 \vec{f}_3(t) = A_1 R(t) \vec{e}_1 + A_2 R(t) \vec{e}_2 + A_3 R(t) \vec{e}_3 \\ &= A_1 \begin{pmatrix} R(t)_{11} \\ R(t)_{21} \\ R(t)_{31} \end{pmatrix} + A_2 \begin{pmatrix} R(t)_{12} \\ R(t)_{22} \\ R(t)_{32} \end{pmatrix} + A_3 \begin{pmatrix} R(t)_{13} \\ R(t)_{23} \\ R(t)_{33} \end{pmatrix} = a_1 \vec{e}_1 + a_2 \vec{e}_2 + a_3 \vec{e}_3 = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

c'est-à-dire

$$\vec{a}_R = R(t) \vec{a}_S \text{ et donc } \vec{a}_S = R(t)^{-1} \vec{a}_R$$

Rappelons que si A_f et A_g sont des matrices, alors $(A_g A_f)^{-1} = A_f^{-1} A_g^{-1}$. Dans le repère lié au solide, on trouve

$$\begin{aligned} \vec{\omega}_S(t) &= \left(R_z(\varphi(t)) R_x(\theta(t)) R_z(\psi(t)) \right)^{-1} \vec{\omega}_R(t) = R_z(\psi(t))^{-1} R_x(\theta(t))^{-1} R_z(\varphi(t))^{-1} \vec{\omega}_R(t) \\ &= R_z(\psi(t))^{-1} R_x(\theta(t))^{-1} R_z(\varphi(t))^{-1} \left(\dot{\varphi}(t) \vec{e}_3 + \dot{\theta}(t) R_z(\varphi(t)) \vec{e}_1 + \dot{\psi}(t) R_z(\varphi(t)) R_x(\theta(t)) \vec{e}_3 \right) \\ &= \dot{\varphi}(t) R_z(-\psi(t)) R_x(-\theta(t)) \underbrace{R_z(-\varphi(t)) \vec{e}_3}_{=\vec{e}_3} + \dot{\theta}(t) R_z(-\psi(t)) R_x(-\theta(t)) \underbrace{R_z(-\varphi(t)) R_z(\varphi(t))}_{=\text{Id}} \vec{e}_1 \\ &\quad + \dot{\psi}(t) R_z(-\psi(t)) R_x(-\theta(t)) \underbrace{R_z(-\varphi(t)) R_z(\varphi(t))}_{=\text{Id}} R_x(\theta(t)) \vec{e}_3 \\ &= \dot{\varphi}(t) R_z(-\psi(t)) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(-\theta(t)) & -\sin(-\theta(t)) \\ 0 & \sin(-\theta(t)) & \cos(-\theta(t)) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \\ &\quad + \dot{\theta}(t) R_z(-\psi(t)) \underbrace{R_x(-\theta(t)) \vec{e}_1}_{=\vec{e}_1} + \dot{\psi}(t) R_z(-\psi(t)) \underbrace{R_x(-\theta(t)) R_x(\theta(t))}_{=\text{Id}} \vec{e}_3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \dot{\varphi}(t) \begin{pmatrix} \cos(-\psi(t)) & -\sin(-\psi(t)) & 0 \\ \sin(-\psi(t)) & \cos(-\psi(t)) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ \sin(\theta(t)) \\ \cos(\theta(t)) \end{pmatrix} \\
&+ \dot{\theta}(t) \begin{pmatrix} \cos(-\psi(t)) & -\sin(-\psi(t)) & 0 \\ \sin(-\psi(t)) & \cos(-\psi(t)) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \dot{\psi}(t) \underbrace{R_z(-\psi(t)) \vec{e}_3}_{=\vec{e}_3} \\
&= \dot{\varphi}(t) \begin{pmatrix} \sin(\psi(t)) \sin(\theta(t)) \\ \cos(\psi(t)) \sin(\theta(t)) \\ \cos(\theta(t)) \end{pmatrix} + \dot{\theta}(t) \begin{pmatrix} \cos(\psi(t)) \\ -\sin(\psi(t)) \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\psi}(t) \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \dot{\varphi}(t) \sin(\psi(t)) \sin(\theta(t)) + \dot{\theta}(t) \cos(\psi(t)) \\ \dot{\varphi}(t) \cos(\psi(t)) \sin(\theta(t)) - \dot{\theta}(t) \sin(\psi(t)) \\ \dot{\varphi}(t) \cos(\theta(t)) + \dot{\psi}(t) \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

2. Moment d'inertie

Dans le référentiel d'inertie R , les positions des masses m_i constitutives du corps solide rigide S sont notées

$$\vec{r}_i(t) = \vec{r}_{CM}(t) + \vec{s}_i(t) = \vec{r}_{CM}(t) + R(t)\vec{s}_{i0}$$

où $R(t)$ est la matrice d'une rotation.

Calculons le moment cinétique $\vec{L}_{totCM}$. Dans le référentiel d'inertie R , nous trouvons

$$\vec{L}_{totCM} = \sum_{i=1}^N m_i \left(\vec{s}_i(t) \times \dot{\vec{s}}_i(t) \right) = \sum_{i=1}^N m_i \left(\vec{s}_i(t) \times \left(\vec{\omega}_R(t) \times \vec{s}_i(t) \right) \right)$$

En vertu de l'identité démontrée au cours de mathématiques

$$\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = (\vec{a} \bullet \vec{c}) \vec{b} - (\vec{a} \bullet \vec{b}) \vec{c}$$

il suit que

$$\vec{L}_{totCM} = \sum_{i=1}^N m_i \left(\left(\vec{s}_i(t) \bullet \vec{s}_i(t) \right) \vec{\omega}_R(t) - \left(\vec{s}_i(t) \bullet \vec{\omega}_R(t) \right) \vec{s}_i(t) \right)$$

Remarquons que

$$\vec{s}_i(t) \bullet \vec{s}_i(t) = \left(R(t)\vec{s}_{i0} \right) \bullet \left(R(t)\vec{s}_{i0} \right) = \vec{s}_{i0} \bullet \vec{s}_{i0} = \|\vec{s}_{i0}\|^2$$

car les rotations préservent le produit scalaire. Par ailleurs, rappelons que

$$\vec{\omega}_R(t) = R(t)\vec{\omega}_S(t)$$

Par conséquent,

$$\vec{s}_i(t) \bullet \vec{\omega}_R(t) = \left(R(t)\vec{s}_{i0} \right) \bullet \left(R(t)\vec{\omega}_S \right) = \vec{s}_{i0} \bullet \vec{\omega}_S$$

Notons

$$\vec{\omega}_S(t) = \begin{pmatrix} \Omega_1(t) \\ \Omega_2(t) \\ \Omega_3(t) \end{pmatrix} \text{ et } \vec{s}_{i0} = \begin{pmatrix} s_{i01} \\ s_{i02} \\ s_{i03} \end{pmatrix}$$

Alors

$$\begin{aligned} \vec{L}_{tot\ CM} &= \sum_{i=1}^N m_i \left(\|\vec{s}_{i0}\|^2 R(t) \vec{\omega}_S(t) - \left(\vec{s}_{i0} \bullet \vec{\omega}_S \right) R(t) \vec{s}_{i0} \right) \\ &= R(t) \left(\sum_{i=1}^N m_i \left(\|\vec{s}_{i0}\|^2 \vec{\omega}_S(t) - \left(\vec{s}_{i0} \bullet \vec{\omega}_S \right) \vec{s}_{i0} \right) \right) \\ &= R(t) \left(\sum_{i=1}^N m_i \left((s_{i01}^2 + s_{i02}^2 + s_{i03}^2) \begin{pmatrix} \Omega_1(t) \\ \Omega_2(t) \\ \Omega_3(t) \end{pmatrix} \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - (s_{i01}\Omega_1(t) + s_{i02}\Omega_2(t) + s_{i03}\Omega_3(t)) \begin{pmatrix} s_{i01} \\ s_{i02} \\ s_{i03} \end{pmatrix} \right) \right) \\ &= R(t) \left(\sum_{i=1}^N m_i \begin{pmatrix} (s_{i01}^2 + s_{i02}^2 + s_{i03}^2) \Omega_1(t) - (s_{i01}\Omega_1(t) + s_{i02}\Omega_2(t) + s_{i03}\Omega_3(t)) s_{i01} \\ (s_{i01}^2 + s_{i02}^2 + s_{i03}^2) \Omega_2(t) - (s_{i01}\Omega_1(t) + s_{i02}\Omega_2(t) + s_{i03}\Omega_3(t)) s_{i02} \\ (s_{i01}^2 + s_{i02}^2 + s_{i03}^2) \Omega_3(t) - (s_{i01}\Omega_1(t) + s_{i02}\Omega_2(t) + s_{i03}\Omega_3(t)) s_{i03} \end{pmatrix} \right) \\ &= R(t) \left(\sum_{i=1}^N m_i \begin{pmatrix} (s_{i02}^2 + s_{i03}^2) \Omega_1(t) - s_{i01}s_{i02}\Omega_2(t) - s_{i01}s_{i03}\Omega_3(t) \\ (s_{i01}^2 + s_{i03}^2) \Omega_2(t) - s_{i01}s_{i02}\Omega_1(t) - s_{i02}s_{i03}\Omega_3(t) \\ (s_{i01}^2 + s_{i02}^2) \Omega_3(t) - s_{i01}s_{i03}\Omega_1(t) - s_{i02}s_{i03}\Omega_2(t) \end{pmatrix} \right) \\ &= R(t) \left(\sum_{i=1}^N m_i \begin{pmatrix} s_{i02}^2 + s_{i03}^2 & -s_{i01}s_{i02} & -s_{i01}s_{i03} \\ -s_{i01}s_{i02} & s_{i01}^2 + s_{i03}^2 & -s_{i02}s_{i03} \\ -s_{i01}s_{i03} & -s_{i02}s_{i03} & s_{i01}^2 + s_{i02}^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Omega_1(t) \\ \Omega_2(t) \\ \Omega_3(t) \end{pmatrix} \right) \\ &= R(t) \underbrace{\begin{pmatrix} \sum_{i=1}^N m_i (s_{i02}^2 + s_{i03}^2) & -\sum_{i=1}^N m_i s_{i01}s_{i02} & -\sum_{i=1}^N m_i s_{i01}s_{i03} \\ -\sum_{i=1}^N m_i s_{i01}s_{i02} & \sum_{i=1}^N m_i (s_{i01}^2 + s_{i03}^2) & -\sum_{i=1}^N m_i s_{i02}s_{i03} \\ -\sum_{i=1}^N m_i s_{i01}s_{i03} & -\sum_{i=1}^N m_i s_{i02}s_{i03} & \sum_{i=1}^N m_i (s_{i01}^2 + s_{i02}^2) \end{pmatrix}}_{=:I} \begin{pmatrix} \Omega_1(t) \\ \Omega_2(t) \\ \Omega_3(t) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

La matrice I est appelée le **tenseur d'inertie**.

3. Axes principaux

Le système d'axes lié au solide défini par les vecteurs

$$\vec{f}_1(t) = R(t)\vec{e}_1, \quad \vec{f}_2(t) = R(t)\vec{e}_2, \quad \vec{f}_3(t) = R(t)\vec{e}_3,$$

coïncide avec le système d'axes du référentiel d'inertie R au temps $t = 0$. En d'autres termes, au temps $t = 0$,

$$\mathcal{F}_0 = (\vec{f}_1(0), \vec{f}_2(0), \vec{f}_3(0)) = \text{Can} := (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$$

la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

Soit

$$\mathcal{G} = (\vec{g}_1, \vec{g}_2, \vec{g}_3)$$

une autre base de $\mathbb{R}^3$. Notons

$$S = (\text{Id})_{\mathcal{G}}^{\text{Can}}$$

la matrice de changement de base définie par

$$\vec{g}_j = S_{1j}\vec{e}_1 + S_{2j}\vec{e}_2 + S_{3j}\vec{e}_3$$

Si les composantes d'un vecteur $\vec{a}$ dans la base $\mathcal{G}$ sont

$$\vec{a}_{\mathcal{G}} = \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \end{pmatrix}$$

alors ses composantes dans la base canonique sont

$$\vec{a} = A_1\vec{g}_1 + A_2\vec{g}_2 + A_3\vec{g}_3$$

$$= A_1 (S_{11}\vec{e}_1 + S_{21}\vec{e}_2 + S_{31}\vec{e}_3) + A_2 (S_{12}\vec{e}_1 + S_{22}\vec{e}_2 + S_{32}\vec{e}_3) + A_3 (S_{13}\vec{e}_1 + S_{23}\vec{e}_2 + S_{33}\vec{e}_3)$$

$$= (S_{11}A_1 + S_{12}A_2 + S_{13}A_3) \vec{e}_1 + (S_{21}A_1 + S_{22}A_2 + S_{23}A_3) \vec{e}_2$$

$$+ (S_{31}A_1 + S_{32}A_2 + S_{33}A_3) \vec{e}_3$$

$$\Rightarrow \vec{a}_{\text{can}} = S\vec{a}_{\mathcal{G}}$$

Supposons maintenant que

$$\vec{s}_{i0} = S\vec{u}_i$$

où $\vec{u}_i$ sont les composantes de $\vec{s}_{i0}$ dans un autre **repère d'axes orthogonaux** lié au solide défini par une base orthonormée $\mathcal{G} = (\vec{g}_1, \vec{g}_2, \vec{g}_3)$. Rappelons que la $j^{\text{ème}}$ colonne de la matrice S contient le vecteur $\vec{g}_j$ écrit dans la base canonique. Comme $\mathcal{G}$ est orthonormée

$$\vec{g}_i \bullet \vec{g}_j = \delta_{ij}$$

il suit que

$$S^{\top}S = SS^{\top} = \text{Id}$$

où $S^\top$ désigne la **transposée** de la matrice S définie par

$$(S^\top)_{ij} := S_{ji}$$

Il suit aussi que le produit scalaire est invariant par S :

$$(S\vec{a}) \bullet (S\vec{a}) = \vec{a} \bullet \vec{a}$$

En effet,

$$\begin{aligned} \|S\vec{a}\|^2 &= (S\vec{a}) \bullet (S\vec{a}) = \sum_{m=1}^3 (S\vec{a})_m^2 = \sum_{m=1}^3 \left(\sum_{p=1}^3 S_{mp} a_p \right)^2 = \sum_{m=1}^3 \sum_{p=1}^3 \sum_{q=1}^3 S_{mp} a_p S_{mq} a_q \\ &= \sum_{p=1}^3 \sum_{q=1}^3 a_p \underbrace{\left(\sum_{m=1}^3 S_{pm}^\top S_{mq} \right)}_{=(S^\top S)_{pq}} a_q = \sum_{p=1}^3 \sum_{q=1}^3 a_p \delta_{pq} a_q = \sum_{p=1}^3 a_p a_p = \vec{a} \bullet \vec{a} = \|\vec{a}\|^2 \end{aligned}$$

Calculons maintenant le tenseur d'inertie:

$$\begin{aligned} I_{ij} &= \sum_{k=1}^N m_k \left(\|\vec{s}_{k0}\|^2 \delta_{ij} - s_{k0i} s_{k0j} \right) \\ &= \sum_{k=1}^N m_k \left(\|\vec{u}_k\|^2 \underbrace{\sum_{p=1}^3 \sum_{q=1}^3 S_{ip} \delta_{pq} S_{qj}^\top}_{=\delta_{ij}} - (S\vec{u}_k)_i (S\vec{u}_k)_j \right) \\ &= \sum_{k=1}^N m_k \left(\|\vec{u}_k\|^2 \sum_{p=1}^3 \sum_{q=1}^3 S_{ip} \delta_{pq} S_{qj}^\top - \left(\sum_{p=1}^3 S_{ip} u_{kp} \right) \left(\sum_{q=1}^3 S_{jq} u_{kq} \right) \right) \\ &= \sum_{p=1}^3 \sum_{q=1}^3 S_{ip} \underbrace{\left(\sum_{k=1}^N m_k \left(\|\vec{u}_k\|^2 \delta_{pq} - u_{kp} u_{kq} \right) \right)}_{=: I_{pq}^\mathcal{G}} S_{qj}^\top \\ &= \sum_{p=1}^3 \sum_{q=1}^3 S_{ip} I_{pq}^\mathcal{G} S_{qj}^\top \\ &= (SI^\mathcal{G}S^\top)_{ij} \end{aligned}$$

où $I^\mathcal{G}$ désigne le moment d'inertie calculé avec les coordonnées des vecteurs $\vec{s}_{k0}$ relativement à la base $\mathcal{G}$. Nous avons montré que

$$I^{\text{can}} = SI^\mathcal{G}S^\top$$

ou encore (rappelons que $S^\top S = \text{Id}$)

$$S^\top I^{\text{can}} S = S^\top \underbrace{(SI^\mathcal{G}S^\top)}_{=\text{Id}} S = \underbrace{(S^\top S)}_{=\text{Id}} I^\mathcal{G} \underbrace{(S^\top S)}_{=\text{Id}} = I^\mathcal{G} \Rightarrow \boxed{I^\mathcal{G} = S^\top I^{\text{can}} S}$$

Comme la matrice I est symétrique, en vertu du **théorème spectral**, il existe une base orthonormée $\mathcal{G}$ de $\mathbb{R}^3$ telle que

$$S^\top I^{\text{can}} S = \begin{pmatrix} I_1 & 0 & 0 \\ 0 & I_2 & 0 \\ 0 & 0 & I_3 \end{pmatrix} = I^{\mathcal{G}}$$

où S est la matrice dont les colonnes sont les vecteurs de la base orthonormée $\mathcal{G}$.

Nous avons montré que pour tout solide, il existe un système d'axes perpendiculaires lié au solide par rapport auquel le moment d'inertie $I^{\mathcal{G}}$ est une matrice diagonale. Ces axes s'appellent les **axes principaux du solide** et les termes diagonaux de $I^{\mathcal{G}}$ s'appellent les **moments principaux d'inertie**. Ce résultat est connu sous le nom de **théorème des axes principaux**.

4. Exemple

EXEMPLE 4.1. Nous considérons un cylindre homogène de masse volumique (constante) ρ_0 , de rayon R , de hauteur h , de volume V et de masse M (voir figure 3).

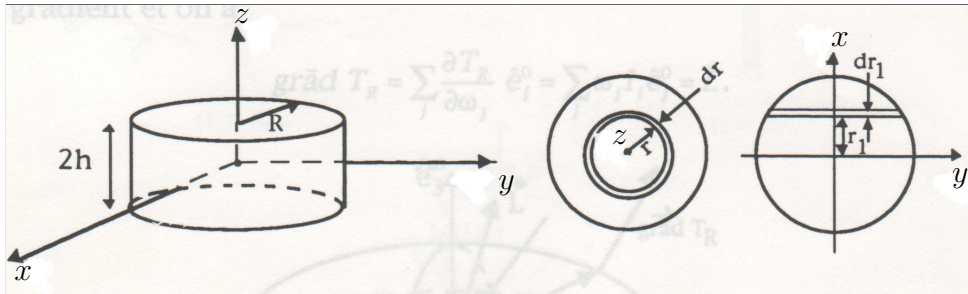


FIGURE 3. Exemple 4.1. (Dessin: UniGe)

Pour calculer I_3 , on décompose le cylindre en tubes cylindriques de rayon r et d'épaisseur dr . Remarquons que

$$(x^2 + y^2) dV = r^2 2\pi r 2h dr$$

Ainsi

$$I_3 = I_{33} = \int_0^R r^2 \rho_0 2\pi r 2h dr = \rho_0 2\pi 2h \left(\frac{r^4}{4} \right) \Big|_0^R = \frac{1}{2} \rho_0 \underbrace{\pi R^2 2h}_{=V} R^2 = \frac{1}{2} M R^2$$

Pour calculer $I_1 = I_{11}$ (ou I_2 qui est égal à I_1 vu la symétrie) on décompose le cylindre en plaques perpendiculairement à l'axe 1:

$$\begin{aligned}
 I_1 = I_{11} &= \rho_0 \int_{r_1=-R}^R \left(\int_{r_2=-\sqrt{R^2-r_1^2}}^{\sqrt{R^2-r_1^2}} \left(\int_{z=-h}^h (r_2^2 + z^2) dz \right) dr_2 \right) dr_1 \\
 &= \rho_0 \int_{r_1=-R}^R \left(\int_{r_2=-\sqrt{R^2-r_1^2}}^{\sqrt{R^2-r_1^2}} \left(r_2^2 2h + \frac{2}{3} h^3 \right) dr_2 \right) dr_1 \\
 &= \rho_0 \frac{2}{3} h \int_{r_1=-R}^R \left((r_2^3 + h^2 r_2) \Big|_{-\sqrt{R^2-r_1^2}}^{\sqrt{R^2-r_1^2}} \right) dr_1 \\
 &= \frac{4}{3} \rho_0 h \left(\int_{-R}^R (R^2 - r_1^2)^{\frac{3}{2}} dr_1 + h^2 \underbrace{\int_{-R}^R \sqrt{R^2 - r_1^2} dr_1}_{=\frac{1}{2}\pi R^2} \right)
 \end{aligned}$$

Pour trouver ce résultat, on peut aussi simplement appliquer le résultat du bloc parallélépipédique avec

$$2 \cdot l_1 = dr_1, \quad l_2 = \sqrt{R^2 - r_1^2} \text{ et } l_3 = h$$

Il vient

$$\frac{M}{3} (l_2^2 + l_3^2) = \frac{4}{3} \rho_0 \sqrt{R^2 - r_1^2} h (R^2 - r_1^2 + h^2) dr_1$$

et

$$I_1 = I_{11} = \int_{-R}^R \frac{4}{3} \rho_0 \sqrt{R^2 - r_1^2} h (R^2 - r_1^2 + h^2) dr_1$$

La première intégrale se calcule en effectuant un changement de variable:

$$\begin{aligned}
 &\int_{-R}^R (R^2 - r_1^2)^{\frac{3}{2}} dr_1 \stackrel{r_1=R\cos(\alpha)}{=} -R^4 \int_{\pi}^0 \sin(\alpha)^4 d\alpha \\
 &= -R^4 \int_{\pi}^0 \left(\frac{1 - \cos(2\alpha)}{2} \right)^2 d\alpha = -\frac{R^4}{4} \int_{\pi}^0 (1 - 2\cos(2\alpha) + \cos(2\alpha)^2) d\alpha \\
 &= -\frac{R^4}{4} \left(\alpha - \sin(2\alpha) + \frac{1}{4} (2\alpha + \sin(2\alpha) \cos(2\alpha)) \right) \Big|_{\pi}^0 = \frac{R^4}{4} \frac{3\pi}{2}
 \end{aligned}$$

Ainsi,

$$I_1 = \frac{4}{3} \rho_0 h \left(\frac{R^4}{4} \frac{3\pi}{2} + h^2 \frac{1}{2} \pi R^2 \right) = \underbrace{\rho_0 \pi R^2 2h}_{=M} \left(\frac{R^2}{4} + \frac{h^2}{3} \right) = M \left(\frac{R^2}{4} + \frac{h^2}{3} \right)$$

Les termes hors diagonale sont nuls. Par exemple,

$$I_{12} = \int_{z=-h}^h \left(\int_{r_1=-R}^R \left(\underbrace{\int_{-\sqrt{R^2-r_1^2}}^{\sqrt{R^2-r_1^2}} r_1 r_2 dr_2}_{=0} \right) dr_1 \right) dz$$

On montre de manière similaire que $I_{13} = I_{23} = 0$.

En résumé, pour le cylindre homogène, on trouve que

$$I = \begin{pmatrix} M \left(\frac{R^2}{4} + \frac{h^2}{3} \right) & 0 & 0 \\ 0 & M \left(\frac{R^2}{4} + \frac{h^2}{3} \right) & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2}MR^2 \end{pmatrix}$$

5. Rotation autour d'un axe fixe

5.1. Rotation autour de l'axe x .

Considérons un solide S en rotation autour de l'axe x passant par le centre de masse de S . Notons $R_x(\theta(t))$ la matrice de rotation qui décrit la rotation du solide. **Nous supposons que l'axe de rotation correspond à un des axes principaux de S** , c'est-à-dire que

$$I = \begin{pmatrix} I_1 & 0 & 0 \\ 0 & I_2 & 0 \\ 0 & 0 & I_3 \end{pmatrix}$$

De plus,

$$\vec{\omega}_R(t) = \dot{\theta}(t)\vec{e}_1 \text{ et } \vec{\omega}_S(t) = R_x(-\theta(t))\vec{\omega}_R(t) = R_x(-\theta(t)) \left(\dot{\theta}(t)\vec{e}_1 \right) = \dot{\theta}(t) \underbrace{R_x(-\theta(t))\vec{e}_1}_{=\vec{e}_1} = \vec{\omega}_R(t)$$

ainsi

$$\vec{\omega}_R(t) = \vec{\omega}_S(t) = \dot{\theta}(t)\vec{e}_1$$

Par conséquent (notons $\vec{\omega}(t)$ au lieu de $\vec{\omega}_S(t)$),

$$\vec{L}_{tot\,CM}(t) = R_x(\theta(t)) (I\vec{\omega}(t)) = R_x(\theta(t)) \left(I_1\dot{\theta}(t)\vec{e}_1 \right) = \dot{\theta}(t)I_1\vec{e}_1 = I_1\vec{\omega}(t)$$

En résumé, nous trouvons que

$$\boxed{\vec{L}_{tot\,CM}(t) = I_1\vec{\omega}(t)}$$

5.2. Rotation autour d'un axe fixe quelconque.

Considérons un solide S en rotation autour d'un axe fixe passant par le centre de masse de S et de vecteur directeur $\vec{d} = R\vec{e}_1$. Notons $R_{\vec{d}}(\theta(t))$ la matrice de rotation qui décrit la rotation du solide. Pour rappel, nous avons vu que

$$R_{\vec{d}}(\theta(t)) = R R_x(\theta(t)) R^{-1}$$

Nous supposons que l'axe de rotation correspond à un des axes principaux de S . Sans perte de généralité, nous pouvons supposer que la matrice R est telle que l'image par R

des autres vecteurs de la base canonique, $\vec{e}_2$ et $\vec{e}_3$, sont les vecteurs directeurs des autres axes principaux de S . En d'autres termes, nous pouvons supposer que

$$R^\top I^{\text{can}} R = I^{\mathcal{G}} = \begin{pmatrix} I_1 & 0 & 0 \\ 0 & I_2 & 0 \\ 0 & 0 & I_3 \end{pmatrix}$$

De plus,

$$\vec{\omega}_R(t) = \dot{\theta}(t)\vec{d} \text{ et } \vec{\omega}_S(t) = R_{\vec{d}}(-\theta(t))\vec{\omega}_R(t) = R_{\vec{d}}(-\theta(t)) \left(\dot{\theta}(t)\vec{d} \right) = \dot{\theta}(t) \underbrace{R_{\vec{d}}(-\theta(t))\vec{d}}_{=\vec{d}}$$

ainsi

$$\vec{\omega}_R(t) = \vec{\omega}_S(t) = \dot{\theta}(t)\vec{d}$$

Par conséquent (notons $R_{\vec{d}}$ au lieu de $R_{\vec{d}}(\theta(t))$ et $\vec{\omega}(t)$ au lieu de $\vec{\omega}_S(t)$),

$$\begin{aligned} \vec{L}_{tot\,CM}(t) &= R_{\vec{d}}(I^{\text{can}}\vec{\omega}(t)) \\ &= R_{\vec{d}}\left(\underbrace{RR^\top}_{=\text{Id}} I^{\text{can}} \left(\dot{\theta}(t)\vec{d}\right)\right) \\ &= \dot{\theta}(t)R_{\vec{d}}\left(R\underbrace{R^\top I^{\text{can}} R}_{=I^{\mathcal{G}}}\vec{e}_1\right) \\ &= \dot{\theta}(t)R_{\vec{d}}(RI_1\vec{e}_1) \\ &= \dot{\theta}(t)I_1R_{\vec{d}}(\underbrace{R\vec{e}_1}_{=\vec{d}}) \\ &= \dot{\theta}(t)I_1\underbrace{R_{\vec{d}}\vec{d}}_{=\vec{d}} \\ &= I_1\vec{\omega}(t) \end{aligned}$$

Le vecteur $\vec{\omega}(t)$ est appelé la **vitesse angulaire**. Remarquons que sa longueur est égale (au signe près) à la vitesse angulaire $\dot{\theta}(t)$:

$$\|\vec{\omega}_S(t)\| = |\dot{\theta}(t)|$$

De l'équation

$$\dot{\vec{L}}_{tot\,CM}(t) = \vec{M}_{res\,ext\,CM}(t)$$

il suit dans le cas d'une rotation autour d'un axe fixe Δ égal à un des axes principaux,

$$I_\Delta \dot{\vec{\omega}}(t) = \vec{M}_{res\,ext\,CM}(t)$$

où I_Δ désigne le moment principal d'inertie correspondant à l'axe Δ . En définissant l'**accélération angulaire** par

$$\vec{\alpha}(t) = \dot{\vec{\omega}}(t) = \ddot{\theta}(t)\vec{d}$$

il suit

$$I_{\Delta} \vec{\alpha}(t) = \vec{M}_{res ext CM}(t)$$

Rappelons que

$$M \vec{a}_{CM}(t) = \vec{F}_{res ext}(t)$$

6. Règle de Steiner

Si le corps solide S est contraint de tourner autour d'un axe fixe Δ , parallèle à un axe principal Δ' de S , mais ne passant pas par le centre de masse de S , alors il est plus commode, comme nous le verrons sur un exemple, de ne pas décomposer le mouvement relativement au centre de masse comme nous l'avons fait jusqu'à présent.

Reprenons le calcul du moment cinétique total. Nous supposons que Δ est un des axes d'un référentiel d'inertie R (*i.e.* l'axe Δ est fixe dans le laboratoire). Sans perte de généralité, nous pouvons supposer que $\vec{e}_3$ est un vecteur directeur de Δ (voir figure 4)

$$\Delta = \langle \vec{e}_3 \rangle \text{ avec } \vec{e}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

et que la position du centre de masse du solide S est donnée par

$$\vec{r}_{CM} = \vec{d}(t) \text{ avec } \vec{d}(t) = \begin{pmatrix} d \cos(\theta(t)) \\ d \sin(\theta(t)) \\ 0 \end{pmatrix}$$

Remarquons que

$$\vec{d}(0) = \begin{pmatrix} d \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

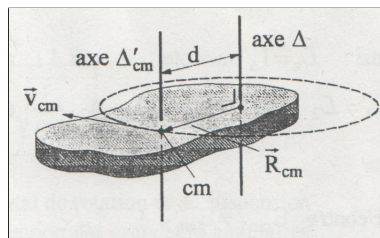


FIGURE 4. Règle de Steiner. (Dessin: CdC)

Par hypothèse, relativement à la base canonique, le tenseur d'inertie est diagonal

$$I = \begin{pmatrix} I_1 & 0 & 0 \\ 0 & I_2 & 0 \\ 0 & 0 & I_{\Delta'} \end{pmatrix} \text{ avec } I_{ij} = \sum_{k=1}^N m_k \left((s_{k01}^2 + s_{k02}^2 + s_{k03}^2) \delta_{ij} - s_{0ki} s_{0kj} \right)$$

où nous avons adopté les notations utilisées plus haut. De plus,

$$\omega_R(t) = \omega_S(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\theta}(t) \end{pmatrix}$$

Alors, en reprenant le calcul présenté plus haut, nous trouvons que le moment cinétique total est donné par

$$\vec{L}_{tot} = \mathcal{I} \vec{\omega}_S(t)$$

avec

$$\mathcal{I} = \begin{pmatrix} I_1 & 0 & 0 \\ 0 & I_2 + Md^2 & 0 \\ 0 & 0 & I_{\Delta'} + Md^2 \end{pmatrix}$$

où M désigne la masse du solide S . Ce résultat est appelé la **règle de Steiner**. En particulier,

$$\boxed{\mathcal{I}_{\Delta} = I_{\Delta'} + Md^2}$$

En effet, pour les éléments diagonaux, nous trouvons que

$$\begin{aligned} \mathcal{I}_{\Delta} &= \mathcal{I}_{33} = \sum_{k=1}^N m_k ((s_{0k1} + d)^2 + s_{0k2}^2) \\ &= \sum_{k=1}^N m_k (s_{0k1}^2 + 2s_{0k1}d + d^2 + s_{0k2}^2) \\ &= \sum_{k=1}^N m_k (s_{0k1}^2 + s_{0k2}^2) + 2d \underbrace{\left(\sum_{k=1}^N m_k s_{0k1} \right)}_{=0} + d^2 \underbrace{\left(\sum_{k=1}^N m_k \right)}_{=M} \\ &= I_{\Delta'} + Md^2 \end{aligned}$$

Un calcul similaire donne $\mathcal{I}_2 = I_2 + Md^2$. Finalement,

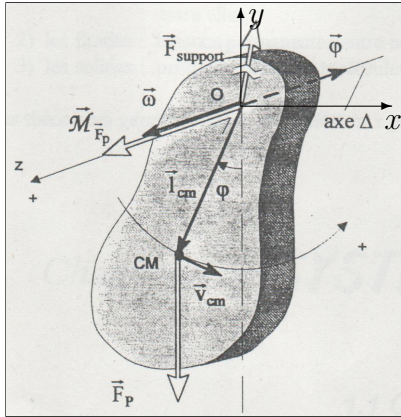
$$\mathcal{I}_1 = \sum_{k=1}^N m_k (s_{0k2}^2 + s_{0k3}^2) = I_1$$

Pour les éléments hors diagonale, nous trouvons que

$$\begin{aligned} \mathcal{I}_{12} &= \sum_{k=1}^N m_k (s_{0k1} + d) s_{0k2} \\ &= \underbrace{\sum_{k=1}^N m_k s_{0k1} s_{0k2}}_{=I_{12}=0} + d \underbrace{\left(\sum_{k=1}^N m_k s_{0k2} \right)}_{=0} \end{aligned}$$

Un calcul similaire donne $\mathcal{I}_{13} = 0 = \mathcal{I}_{23}$.

7. Exemple d'application de la règle de Steiner: le pendule physique



(Dessin: Collège de Candolle)

Sur le dessin, si nous supposons que le corps est homogène, alors l'axe z est un axe principal. En effet, comme l'épaisseur du corps est constante (nous la notons $2e$), le centre de masse est au milieu de l'épaisseur du corps et il vient

$$I_{13} = \int_V xz dV = \int_S \underbrace{\left(\int_{-e}^e xz dz \right)}_{=0} dx dy \text{ et}$$

$$I_{23} = \int_V yz dV = \int_S \underbrace{\left(\int_{-e}^e yz dz \right)}_{=0} dx dy = 0$$

Par conséquent,

$$I = \begin{pmatrix} I_{11} & I_{12} & 0 \\ I_{21} & I_{22} & 0 \\ 0 & 0 & I_3 \end{pmatrix}$$

De plus, la rotation a lieu autour de l'axe z , par conséquent,

$$\vec{\omega}_S(t) = \vec{\omega}_R(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\varphi}(t) \end{pmatrix}$$

et donc

$$I\vec{\omega}_S(t) = \begin{pmatrix} I_{11} & I_{12} & 0 \\ I_{21} & I_{22} & 0 \\ 0 & 0 & I_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\varphi}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ I_3\dot{\varphi}(t) \end{pmatrix}$$

où φ est l'angle défini sur la figure représentant le pendule physique. (**NB** $\varphi = 0$ correspond à la position verticale du pendule.)

7.1. Référentiel lié à l'axe de rotation.

Les forces subies par le pendule physique sont la gravitation plus la force exercée par l'axe sur le pendule (sur le pallier). Relativement au référentiel lié à l'axe, le moment de la force exercée par l'axe est nul et seul le moment de la force de gravitation n'est pas nul. Il est donc commode

d'écrire les équations du mouvement dans le référentiel lié à l'axe plutôt que de travailler dans le référentiel lié au centre de masse. En vertu du théorème du moment cinétique, nous trouvons que

$$\vec{M}_{res ext} = \dot{\vec{L}}_{tot} = I_{\Delta} \vec{\alpha}(t) = I_{\Delta} \alpha(t) \vec{e}_3 = I_{\Delta} \ddot{\varphi}(t) \vec{e}_3$$

où $\vec{e}_3$ est le vecteur directeur de longueur 1 de l'axe z (voir dessin). De plus, en vertu de la règle de Steiner,

$$I_{\Delta} = I_{\Delta'_{CM}} + ml_{CM}^2$$

Par ailleurs,

$$\vec{M}_{res ext} = \sum_{i=1}^N \vec{r}_i \times (m_i \vec{g}) = \underbrace{\left(\sum_{i=1}^N m_i \vec{r}_i \right)}_{=m\vec{l}_{CM}} \times \vec{g} = m\vec{l}_{CM} \times \vec{g} = -mgl_{CM} \sin(\varphi) \vec{e}_3$$

(NB Sur le dessin $\varphi < 0$). Par conséquent, l'équation du mouvement s'écrit

$$I_{\Delta} \ddot{\varphi}(t) = -mgl_{CM} \sin(\varphi(t))$$

et pour des petites oscillations

$$\sin(\varphi(t)) \approx \varphi(t), \quad \forall t$$

il vient

$$I_{\Delta} \ddot{\varphi}(t) = -mgl_{CM} \varphi(t)$$

c'est-à-dire

$$\ddot{\varphi}(t) + \frac{mgl_{CM}}{I_{\Delta}} \varphi(t) = 0$$

ou encore

$$\ddot{\varphi}(t) + \omega^2 \varphi(t) = 0 \text{ avec } \omega = \sqrt{\frac{mgl_{CM}}{I_{\Delta}}}$$

C'est l'équation d'un oscillateur harmonique dont la solution générale est donnée par

$$\varphi(t) = a \cos(\omega t + \delta)$$

La période est donnée par

$$\omega T = 2\pi \Rightarrow T = 2\pi \frac{1}{\omega} = 2\pi \sqrt{\frac{I_{\Delta}}{mgl_{CM}}} = 2\pi \sqrt{\frac{I_{\Delta'_{CM}} + ml_{CM}^2}{mgl_{CM}}}$$

7.2. Référentiel lié au centre de masse.

Plaçons-nous maintenant dans le référentiel lié au centre de masse. Le moment de la force de gravitation est nul

$$\sum_{i=1}^N \vec{s}_i \times m_i \vec{g} = \underbrace{\left(\sum_{i=1}^n m_i \vec{s}_i \right)}_{=\vec{0}} \times \vec{g}$$

et nous devons déterminer le moment de la force exercée par l'axe sur le solide. Dans le repère lié à l'axe, les coordonnées du centre de masse sont

$$\begin{aligned}
 \vec{r}_{CM}(t) &= \vec{l}_{CM} = l_{CM} \begin{pmatrix} \sin(\varphi(t)) \\ -\cos(\varphi(t)) \\ 0 \end{pmatrix} \\
 \Rightarrow \vec{v}_{CM}(t) &= l_{CM} \begin{pmatrix} \cos(\varphi(t))\dot{\varphi}(t) \\ \sin(\varphi(t))\dot{\varphi}(t) \\ 0 \end{pmatrix} = l_{CM} \begin{pmatrix} \cos(\varphi(t))\omega(t) \\ \sin(\varphi(t))\omega(t) \\ 0 \end{pmatrix} \\
 \Rightarrow \vec{a}_{CM}(t) &= l_{CM} \begin{pmatrix} -\sin(\varphi(t))\omega(t)^2 \\ \cos(\varphi(t))\omega(t)^2 \\ 0 \end{pmatrix} + l_{CM} \begin{pmatrix} \cos(\varphi(t))\dot{\omega}(t) \\ \sin(\varphi(t))\dot{\omega}(t) \\ 0 \end{pmatrix} \\
 &= -\omega(t)^2 \vec{l}_{CM} + l_{CM} \alpha(t) \begin{pmatrix} \cos(\varphi(t)) \\ \sin(\varphi(t)) \\ 0 \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

Par conséquent,

$$\vec{F}_{res ext}(t) = m\vec{a}_{CM}(t) = \vec{F}_{axe/pend} + m\vec{g} \Rightarrow \vec{F}_{axe/pend} = m\vec{a}_{CM}(t) - m\vec{g}$$

$$\Rightarrow \vec{M}_{res ext CM} = -\vec{l}_{CM} \times \vec{F}_{axe/pend} = -m\vec{l}_{CM} \times \vec{a}_{CM} + m\vec{l}_{CM} \times \vec{g}$$

$$\begin{aligned}
 &= m\omega(t)^2 \underbrace{\vec{l}_{CM} \times \vec{l}_{CM}}_{=\vec{0}} - m\alpha(t)l_{CM}\vec{l}_{CM} \times \begin{pmatrix} \cos(\varphi(t)) \\ \sin(\varphi(t)) \\ 0 \end{pmatrix} + mgl_{CM} \begin{pmatrix} \sin(\varphi(t)) \\ -\cos(\varphi(t)) \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \\
 &= m\alpha(t)l_{CM}^2 \begin{pmatrix} -\sin(\varphi(t)) \\ \cos(\varphi(t)) \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \cos(\varphi(t)) \\ \sin(\varphi(t)) \\ 0 \end{pmatrix} - mgl_{CM} \sin(\varphi(t)) \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \\
 &= -(mgl_{CM} \sin(\varphi(t)) + m\alpha(t)l_{CM}^2) \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

Il suit

$$I_{\Delta'}\alpha(t) = -(mgl_{CM} \sin(\varphi(t)) + m\alpha(t)l_{CM}^2)$$

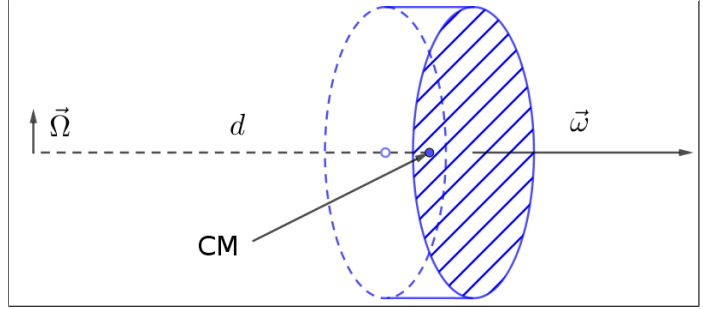
et pour des petites oscillations

$$I_{\Delta'}\alpha(t) = -(mgl_{CM}\varphi(t) + m\alpha(t)l_{CM}^2) \Rightarrow (I_{\Delta'} + ml_{CM}^2)\ddot{\varphi}(t) + mgl_{CM}\varphi(t) = 0$$

Nous trouvons donc la même équation pour $\varphi(t)$ en nous plaçant dans le référentiel du centre de masse ou en nous plaçant dans le référentiel lié à l'axe et en utilisant la règle de Steiner.

8. Le gyroscope

On considère un corps de révolution (comme par exemple un disque), appelé le volant, qui tourne à vitesse angulaire $\vec{\omega}$ autour de son axe d'invariance par rotation. On note I son moment d'inertie. Par ailleurs l'axe de rotation du volant tourne dans le plan horizontal. On suppose que le centre de masse du volant est à distance d de l'axe de rotation vertical. On note $\varphi(t)$ l'angle entre l'axe x et l'axe de rotation du volant et $\Omega(t) = \dot{\varphi}(t)$.



Calculons le moment cinétique du volant dans le cas d'un disque. Notons $\vec{s}_i(t)$ la position de la masse m_i du système au temps t relativement au centre de masse. Alors,

$$\vec{s}_i(t) = R(t)\vec{s}_{i0} = R_z(\varphi(t))R_x(\omega t)\vec{s}_{i0}$$

où, rappelons-le (voir figure 5),

$$R_z(\varphi(t)) = \begin{pmatrix} \cos(\varphi(t)) & -\sin(\varphi(t)) & 0 \\ \sin(\varphi(t)) & \cos(\varphi(t)) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } R_x(\omega t) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\omega t) & -\sin(\omega t) \\ 0 & \sin(\omega t) & \cos(\omega t) \end{pmatrix}$$

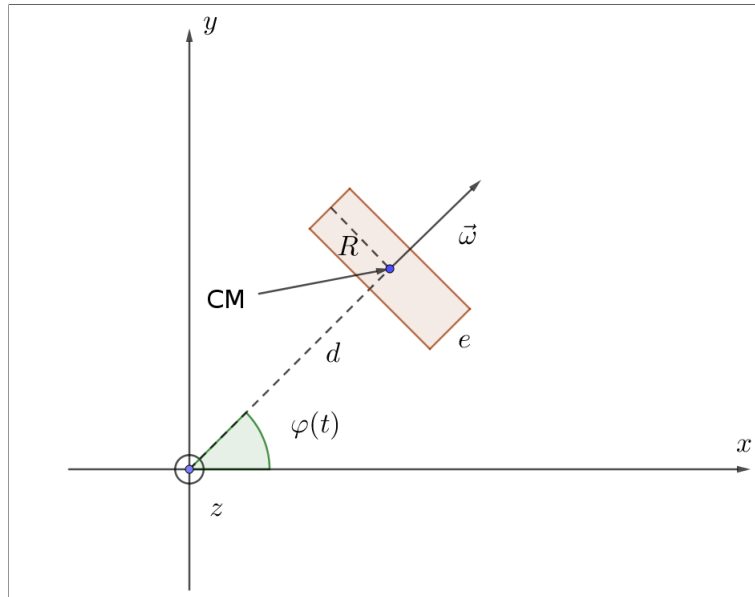


FIGURE 5. Le gyroscope “vu du dessus”

Alors

$$\dot{\vec{s}}_i(t) = \Omega(t)\vec{e}_3 \times \vec{s}_i(t) + \omega (R_z(\varphi(t))\vec{e}_1 \times \vec{s}_i(t))$$

Par conséquent,

$$\vec{\omega}_R(t) = \Omega(t)\vec{e}_3 + \omega \begin{pmatrix} \cos(\varphi(t)) & -\sin(\varphi(t)) & 0 \\ \sin(\varphi(t)) & \cos(\varphi(t)) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \vec{e}_1 = \begin{pmatrix} \omega \cos(\varphi(t)) \\ \omega \sin(\varphi(t)) \\ \Omega(t) \end{pmatrix}$$

et

$$\vec{\omega}_S(t) = R(t)^{-1}\vec{\omega}_R(t) = R_x(-\omega t)R_z(-\varphi(t))(\Omega(t)\vec{e}_3 + \omega R_z(\varphi(t))\vec{e}_1) = \begin{pmatrix} \omega \\ \Omega(t) \sin(\omega t) \\ \Omega(t) \cos(\omega t) \end{pmatrix}$$

Il suit que

$$\begin{aligned} \vec{L}_{disque\,CM}(t) &= R(t) \begin{pmatrix} I_1 & 0 & 0 \\ 0 & I_2 & 0 \\ 0 & 0 & I_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega \\ \Omega(t) \sin(\omega t) \\ \Omega(t) \cos(\omega t) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos(\varphi(t)) & -\sin(\varphi(t)) & 0 \\ \sin(\varphi(t)) & \cos(\varphi(t)) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\omega t) & -\sin(\omega t) \\ 0 & \sin(\omega t) & \cos(\omega t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_1\omega \\ I_2\Omega(t) \sin(\omega t) \\ I_2\Omega(t) \cos(\omega t) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos(\varphi(t)) & -\sin(\varphi(t)) & 0 \\ \sin(\varphi(t)) & \cos(\varphi(t)) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_1\omega \\ 0 \\ I_2\Omega(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_1\omega \cos(\varphi(t)) \\ I_1\omega \sin(\varphi(t)) \\ I_2\Omega(t) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

où

$$I_1 = \frac{1}{2}MR^2 \text{ et } I_2 = M \left(\frac{R^2}{4} + \frac{e^2}{12} \right)$$

où e désigne l'épaisseur du volant.

Par conséquent, en vertu de la règle de Steiner,

$$\dot{\vec{L}}_{axe\,\vec{\Omega}}(t) = \begin{pmatrix} -I_1\omega\Omega(t) \sin(\varphi(t)) \\ I_1\omega\Omega(t) \cos(\varphi(t)) \\ I_2\dot{\Omega}(t) \end{pmatrix}$$

où

$$I_2' = Md^2 + M \left(\frac{R^2}{4} + \frac{e^2}{12} \right)$$

9. Energie cinétique d'un corps solide

9.1. Energie cinétique de rotation.

Calculons l'énergie cinétique totale du corps solide S calculée dans le référentiel du centre de masse. Rappelons l'identité démontrée au cours de mathématiques:

$$\|\vec{a} \times \vec{b}\|^2 = \|\vec{a}\|^2\|\vec{b}\|^2 - (\vec{a} \bullet \vec{b})^2$$

Par ailleurs, rappelons que

$$\vec{s}_i(t) = R(t)\vec{s}_{i0}, \quad \vec{\omega}_S(t) := R(t)^{-1}\vec{\omega}_R(t)$$

et que nous notons les coordonnées du vecteur $\vec{\omega}_S(t)$ relativement au repère lié au solide par

$$\vec{\omega}_S(t) = \begin{pmatrix} \Omega_1(t) \\ \Omega_2(t) \\ \Omega_3(t) \end{pmatrix}$$

Il suit que

$$\begin{aligned} E'_{cin tot} &= \sum_{i=1}^N \frac{1}{2} m_i \|\dot{\vec{s}}_i(t)\|^2 \\ &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N m_i \|\vec{\omega}_R(t) \times \vec{s}_i(t)\|^2 \\ &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N m_i (\|\vec{\omega}_R(t)\|^2 \|\vec{s}_i(t)\|^2 - (\vec{\omega}_R(t) \bullet \vec{s}_i(t))^2) \\ &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N m_i \left(\underbrace{\|R(t)\vec{\omega}_S(t)\|^2}_{=\|\vec{\omega}_S(t)\|^2} \underbrace{\|R(t)\vec{s}_{i0}\|^2}_{=\|\vec{s}_{i0}\|^2} - \left(\underbrace{(R(t)\vec{\omega}_S(t)) \bullet (R(t)\vec{s}_{i0})}_{=\vec{\omega}_S(t) \bullet \vec{s}_{i0}} \right)^2 \right) \\ &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N m_i \left(\left(\Omega_1(t)^2 + \Omega_2(t)^2 + \Omega_3(t)^2 \right) \left(s_{i01}^2 + s_{i02}^2 + s_{i03}^2 \right) \right. \\ &\quad \left. - \left(\Omega_1(t)s_{i01} + \Omega_2(t)s_{i02} + \Omega_3(t)s_{i03} \right)^2 \right) \\ &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N m_i \left(\Omega_1(t)^2 s_{i01}^2 + \Omega_2(t)^2 s_{i01}^2 + \Omega_3(t)^2 s_{i01}^2 + \Omega_1(t)^2 s_{i02}^2 + \Omega_2(t)^2 s_{i02}^2 + \Omega_3(t)^2 s_{i02}^2 \right. \\ &\quad \left. + \Omega_1(t)^2 s_{i03}^2 + \Omega_2(t)^2 s_{i03}^2 + \Omega_3(t)^2 s_{i03}^2 \right. \\ &\quad \left. - \Omega_1(t)^2 s_{i01}^2 - \Omega_2(t)^2 s_{i02}^2 - \Omega_3(t)^2 s_{i03}^2 \right. \\ &\quad \left. - 2\Omega_1(t)s_{i01}\Omega_2(t)s_{i02} - 2\Omega_1(t)s_{i01}\Omega_3(t)s_{i03} - 2\Omega_2(t)s_{i02}\Omega_3(t)s_{i03} \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N m_i \left(\Omega_2(t)^2 s_{i01}^2 + \Omega_3(t)^2 s_{i01}^2 + \Omega_1(t)^2 s_{i02}^2 + \Omega_3(t)^2 s_{i02}^2 + \Omega_1(t)^2 s_{i03}^2 + \Omega_2(t)^2 s_{i03}^2 \right. \\
&\quad \left. - 2\Omega_1(t)s_{i01}\Omega_2(t)s_{i02} - 2\Omega_1(t)s_{i01}\Omega_3(t)s_{i03} - 2\Omega_2(t)s_{i02}\Omega_3(t)s_{i03} \right) \\
&= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N m_i \left(\Omega_1(t)^2 (s_{i02}^2 + s_{i03}^2) + \Omega_2(t)^2 (s_{i01}^2 + s_{i03}^2) + \Omega_3(t)^2 (s_{i01}^2 + s_{i02}^2) \right. \\
&\quad \left. - 2\Omega_1(t)s_{i01}\Omega_2(t)s_{i02} - 2\Omega_1(t)s_{i01}\Omega_3(t)s_{i03} - 2\Omega_2(t)s_{i02}\Omega_3(t)s_{i03} \right) \\
&= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \Omega_1(t) & \Omega_2(t) & \Omega_3(t) \end{pmatrix} \underbrace{\begin{pmatrix} \sum_{i=1}^N m_i (s_{i02}^2 + s_{i03}^2) & -\sum_{i=1}^N m_i (s_{i01}s_{i02}) & -\sum_{i=1}^N m_i (s_{i01}s_{i03}) \\ -\sum_{i=1}^N m_i (s_{i01}s_{i02}) & \sum_{i=1}^N m_i (s_{i01}^2 + s_{i03}^2) & -\sum_{i=1}^N m_i (s_{i02}s_{i03}) \\ -\sum_{i=1}^N m_i (s_{i01}s_{i03}) & -\sum_{i=1}^N m_i (s_{i02}s_{i03}) & \sum_{i=1}^N m_i (s_{i01}^2 + s_{i02}^2) \end{pmatrix}}_{=I} \begin{pmatrix} \Omega_1(t) \\ \Omega_2(t) \\ \Omega_3(t) \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{2} \vec{\omega}_S(t)^\top I \vec{\omega}_S(t)
\end{aligned}$$

En résumé, nous trouvons que

$$E_{cin tot} = \frac{1}{2} M \|\vec{v}_{CM}\|^2 + \frac{1}{2} \vec{\omega}_S(t)^\top I \vec{\omega}_S(t)$$

Le deuxième terme est appelé **l'énergie cinétique de rotation**. Nous le noterons $E_{cin rot}$. Ainsi

$$E_{cin tot} = E_{cin CM} + E_{cin rot}$$

9.2. Ellipsoïde d'inertie.

Dans le système d'axes principaux lié au solide, le tenseur d'inertie est diagonal

$$I^G = \begin{pmatrix} I_1 & 0 & 0 \\ 0 & I_2 & 0 \\ 0 & 0 & I_3 \end{pmatrix}$$

et l'énergie cinétique de rotation devient

$$E_{cin rot} = \frac{1}{2} (I_1 \Omega_1(t)^2 + I_2 \Omega_2(t)^2 + I_3 \Omega_3(t)^2)$$

Si l'énergie cinétique de rotation est constante, alors

$$1 = \left(\frac{\Omega_1(t)}{a_1} \right)^2 + \left(\frac{\Omega_2(t)}{a_2} \right)^2 + \left(\frac{\Omega_3(t)}{a_3} \right)^2, \quad \forall t, \quad \text{avec } a_i = \sqrt{\frac{2E_{cin rot}}{I_i}}$$

C'est l'équation d'un ellipsoïde dans l'espace des Ω (voir figure 6). Il est appelé **l'ellipsoïde d'inertie**.

9.3. Orientation de $\vec{L}$ par rapport à $\vec{\omega}$.

Commençons par quelques remarques d'ordre mathématique. Soit $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction dérivable. On définit le gradient de f , noté $\overrightarrow{\text{grad}}(f)$ ou $\vec{\nabla}f$, par

$$\overrightarrow{\text{grad}}(f) = \vec{\nabla}f = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} \\ \frac{\partial f}{\partial y} \\ \frac{\partial f}{\partial z} \end{pmatrix}$$

Soit S une surface dans l'espace définie par

$$S = \left\{ \vec{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid f(\vec{r}) = 0 \right\}$$

et

$$\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix} \in S \quad \forall t \in]-1, 1[\text{ c'est-à-dire } f(\vec{r}(t)) = 0 \quad \forall t \in]-1, 1[$$

une courbe sur cette surface. Notons $\vec{r}_0 = \vec{r}(0)$. Alors

$$0 = \frac{d}{dt}f(\vec{r}(t)) = \frac{\partial f}{\partial x}\dot{x}(t) + \frac{\partial f}{\partial y}\dot{y}(t) + \frac{\partial f}{\partial z}\dot{z}(t) = \left((\vec{\nabla}f)(\vec{r}(t)) \right) \bullet \dot{\vec{r}}(t) \Rightarrow \left((\vec{\nabla}f)(\vec{r}_0) \right) \bullet \dot{\vec{r}}(0) = 0$$

ce qui signifie que le vecteur $(\vec{\nabla}f)(\vec{r}_0)$ est orthogonal au plan tangent à la surface S au point $\vec{r}_0$.

En posant

$$f(\Omega_1, \Omega_2, \Omega_3) = \left(\frac{\Omega_1}{a_1} \right)^2 + \left(\frac{\Omega_2}{a_2} \right)^2 + \left(\frac{\Omega_3}{a_3} \right)^2 - 1$$

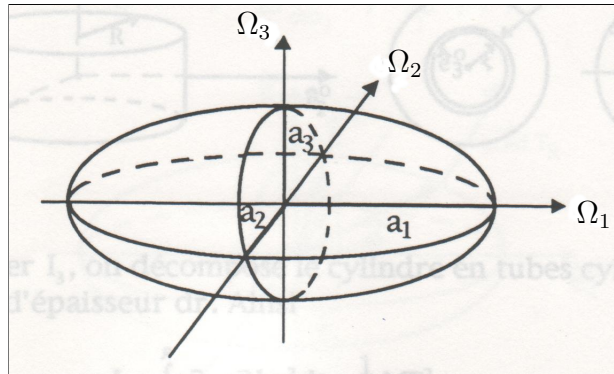


FIGURE 6. Ellipsoïde d'inertie. (Dessin: UniGe)

il suit que (rappel: $a_i = \sqrt{\frac{2E_{cin rot}}{I_i}}$)

$$\vec{\nabla} f = \begin{pmatrix} 2\frac{\Omega_1}{a_1^2} \\ 2\frac{\Omega_2}{a_2^2} \\ 2\frac{\Omega_3}{a_3^2} \end{pmatrix} = \frac{1}{E_{cin rot}} \begin{pmatrix} I_1\Omega_1 \\ I_2\Omega_2 \\ I_2\Omega_2 \end{pmatrix} = \frac{1}{E_{cin rot}} I \vec{\omega}_S = \frac{1}{E_{cin rot}} \vec{L}_{tot CM_S}$$

où

$$\vec{L}_{tot CM_S} = \begin{pmatrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{pmatrix} = I \vec{\omega}_S$$

désigne les coordonnées de $\vec{L}_{tot CM}$ relativement au repère lié au solide. Par conséquent, le moment cinétique $\vec{L}_{tot CM_S}$ est un vecteur normal au plan tangent à la surface de l'ellipsoïde d'inertie (voir figure 7).

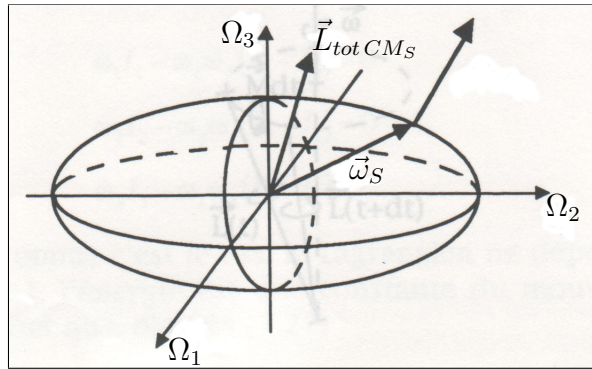


FIGURE 7. (Dessin: UniGe)

Il suit de ce qui précède que $\vec{L}_{tot CM_S}$ est parallèle à $\vec{\omega}_S$ uniquement dans les cas suivants:

- (1) pour un ellipsoïde d'inertie quelconque (avec $I_1 \neq I_2 \neq I_3 \neq I_1$), lorsque l'axe de rotation correspond à un des axes principaux;
- (2) pour un ellipsoïde d'inertie de révolution (*i.e.* $I_2 \neq I_1 = I_3$), lorsque $\vec{\omega}_S$ est parallèle à l'axe 2 ou dans le plan engendré par les axes 1 et 3;
- (3) pour un ellipsoïde sphérique (*i.e.* $I_1 = I_2 = I_3$), pour toute orientation de $\vec{\omega}_S$.

EXEMPLE 9.1. Considérons un barreau de masse négligeable portant à ses extrémités 2 masses égales et fixé en son centre à un axe de rotation avec lequel il fait un angle constant α (voir figure 8).

Dans le premier cas, la direction de $\vec{L}_{tot CM}$ varie au cours du temps et en conséquence, le système subit un moment de force $\vec{M}_{res ext CM} = \dot{\vec{L}}_{tot CM}$ exercé par les paliers. Dans le deuxième cas, la direction de $\vec{L}_{tot CM}$ ne varie pas et $\vec{M}_{res ext CM} = \dot{\vec{L}}_{tot CM} = 0$.

C'est pour cette raison qu'il faut équilibrer les roues de voiture avec des charges de plomb, de façon à faire coïncider l'axe principal d'inertie avec l'axe de rotation.

10. Energie mécanique du corps solide

Rappelons le **théorème de l'énergie cinétique**: pour une masse ponctuelle m_i , la variation de l'énergie cinétique est égale au travail de la force résultante agissant sur m_i :

$$\Delta E_{cin i} = E_{cin i}(t_1) - E_{cin i}(t_0) = \int_{t_0}^{t_1} \vec{F}_{res/i}(t) \bullet \vec{v}_i(t) dt$$

Nous supposons que le corps solide S est soumis à l'action d'une force extérieure **conservative** $\vec{F}_{ext cons}$ (comme par exemple la force de gravitation). Par définition, le travail de cette force ne dépend pas du chemin parcouru par une masse m_i :

$$A_{\vec{F}_{ext cons/i}} = \int_{t_0}^{t_1} \left(\vec{F}_{ext cons/i} \bullet \vec{v}_i(t) \right) dt = -(U(\vec{r}_i(t_1)) - U(\vec{r}_i(t_0)))$$

où U désigne le potentiel dont dérive la force conservative $\vec{F}_{ext cons}$, c'est-à-dire,

$$\vec{F}_{ext cons}(\vec{r}) = -(\vec{\nabla} U)(\vec{r})$$

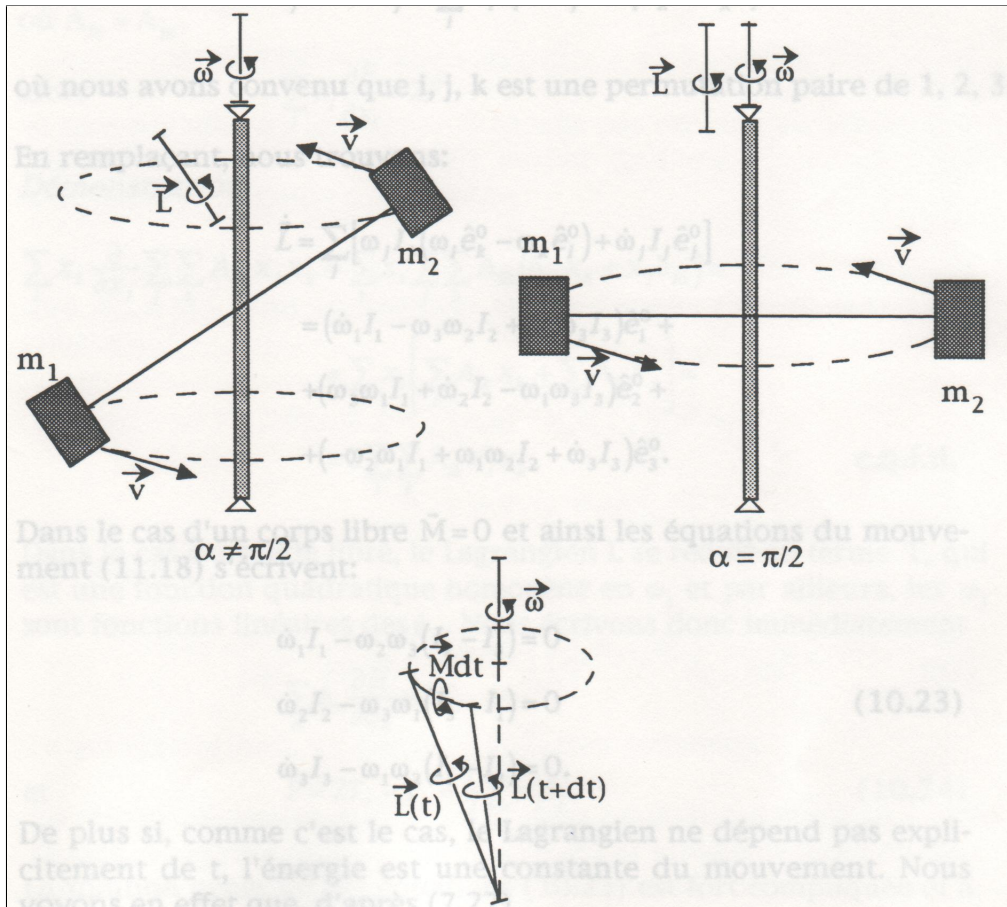


FIGURE 8. (Dessin: UniGe)

Pour le corps solide S , nous trouvons

$$\begin{aligned}
 \Delta E_{cin tot} &= E_{cin tot}(t_1) - E_{cin tot}(t_0) = \sum_{i=1}^N \int_{t_0}^{t_1} \left(\vec{F}_{res/i}(t) \bullet \vec{v}_i(t) \right) dt \\
 &= \sum_{i=1}^N \int_{t_0}^{t_1} \left(\left(\vec{F}_{ext cons/i}(t) + \sum_{j \neq i} \vec{F}_{j/i}(t) \right) \bullet \vec{v}_i(t) \right) dt \\
 &= \sum_{i=1}^N \underbrace{\int_{t_0}^{t_1} \left(\vec{F}_{ext cons/i} \bullet \vec{v}_i(t) \right) dt}_{=-(U(\vec{r}_i(t_1)) - U(\vec{r}_i(t_0)))} + \underbrace{\sum_{i=1}^N \sum_{j \neq i} \int_{t_0}^{t_1} \left(\vec{F}_{j/i}(t) \bullet \vec{v}_i(t) \right) dt}_{=0} \\
 &= - \left(\sum_{i=1}^N U(\vec{r}_i(t_1)) - \sum_{i=1}^N U(\vec{r}_i(t_0)) \right)
 \end{aligned}$$

Le deuxième terme à l'avant dernière ligne est nul. En effet, en vertu de la troisième Loi de Newton (action=réaction), il suit que

$$\vec{F}_{i/j} = -\vec{F}_{j/i}$$

De plus,

$$\text{cte} = \|\vec{r}_i(t) - \vec{r}_j(t)\| \Rightarrow 0 = \frac{d}{dt} \left((\vec{r}_i(t) - \vec{r}_j(t)) \bullet (\vec{r}_i(t) - \vec{r}_j(t)) \right) = 2 (\vec{r}_i(t) - \vec{r}_j(t)) \bullet (\dot{\vec{r}}_i(t) - \dot{\vec{r}}_j(t))$$

Il en résulte que $\vec{r}_i(t) - \vec{r}_j(t)$ est toujours orthogonal à $\dot{\vec{r}}_i(t) - \dot{\vec{r}}_j(t)$. Par conséquent,

$$\int_{t_0}^{t_1} \left(\vec{F}_{j/i}(t) \bullet \vec{v}_i(t) \right) dt + \int_{t_0}^{t_1} \left(\vec{F}_{i/j}(t) \bullet \vec{v}_j(t) \right) dt = \int_{t_0}^{t_1} \underbrace{\left(\vec{F}_{j/i}(t) \bullet (\dot{\vec{r}}_i(t) - \dot{\vec{r}}_j(t)) \right)}_{=0} dt$$

car la force $\vec{F}_{i/j}$ est parallèle à $\vec{r}_i(t) - \vec{r}_j(t)$.

10.1. Mouvement à la surface de la Terre.

Pour une masse ponctuelle se déplaçant à la surface de la Terre, nous avons vu que nous pouvons faire l'approximation

$$U(\vec{r}_i) = mgz_i \text{ où } \vec{r}_i = \begin{pmatrix} x_i \\ y_i \\ z_i \end{pmatrix}$$

Par conséquent,

$$\sum_{i=1}^N U(\vec{r}_i(t)) = \underbrace{\left(\sum_{i=1}^N m_i z_i(t) \right)}_{=Mz_{CM}(t)} g = Mgz_{CM}(t)$$

où M désigne la masse du corps solide S .

Nous avons donc montré que pour un mouvement à la surface de la Terre, l'énergie mécanique totale

$$E_{tot} = E_{cin CM} + E_{cin rot} + E_{pot CM} = \frac{1}{2}M\|\vec{v}_{CM}(t)\|^2 + \frac{1}{2}\vec{\omega}_S(t)^\top I \vec{\omega}_S(t) + Mgz_{CM}(t)$$

ne change pas au cours du mouvement. **L'énergie mécanique totale est conservée.**

En effet,

$$\begin{aligned} E_{cin tot}(t_1) - E_{cin tot}(t_0) &= -(Mgz_{CM}(t_1) - Mgz_{CM}(t_0)) \\ \Rightarrow E_{cin tot}(t_1) + Mgz_{CM}(t_1) &= E_{cin tot}(t_0) + Mgz_{CM}(t_0) \end{aligned}$$

11. Equations d'Euler

En 1765, Euler définit le centre de masse, les moments d'inertie et les axes principaux d'inertie dans un traité intitulé "Theoria motus corporum solidorum seu rigidorum"; son fils publiera, en 1790, une édition revue et augmentée de cet ouvrage.

Nous avons vu que les équations du mouvement d'un corps solide S sont données par

$$\vec{F}_{res ext} = M\vec{a}_{CM}(t) \text{ et } \dot{\vec{L}}_{tot CM} = \vec{M}_{res ext CM}(t) \text{ avec } \vec{L}_{tot CM} = R(t)I\vec{\omega}_S(t)$$

Nous pouvons sans perte de généralité supposer que I est diagonal

$$I = \begin{pmatrix} I_1 & 0 & 0 \\ 0 & I_2 & 0 \\ 0 & 0 & I_3 \end{pmatrix}$$

Notons le moment de force extérieur dans le référentiel lié au solide par

$$\vec{M}_{res ext CM_S} = R^{-1}(t)\vec{M}_{res ext CM}(t) = \begin{pmatrix} M_1(t) \\ M_2(t) \\ M_3(t) \end{pmatrix}$$

Alors, l'équation décrivant la rotation du solide donnée ci-dessus devient

$$\begin{aligned} \vec{M}_{res ext CM}(t) = \dot{\vec{L}}_{tot CM} &= \underbrace{\vec{\omega}_R(t)}_{=R(t)\vec{\omega}_S(t)} \times (R(t)I\vec{\omega}_S(t)) + R(t)I\dot{\vec{\omega}}_S(t) \\ &= (R(t)\vec{\omega}_S(t)) \times (R(t)I\vec{\omega}_S(t)) + R(t)I\dot{\vec{\omega}}_S(t) \\ &= R(t)\left(\vec{\omega}_S(t) \times (I\vec{\omega}_S(t))\right) + R(t)I\dot{\vec{\omega}}_S(t) \\ &= R(t)\left(\vec{\omega}_S(t) \times (I\vec{\omega}_S(t)) + I\dot{\vec{\omega}}_S(t)\right) \end{aligned}$$

c'est-à-dire

$$\vec{\omega}_S(t) \times (I\vec{\omega}_S(t)) + I\dot{\vec{\omega}}_S(t) = R^{-1}(t)\vec{M}_{res ext CM}(t)$$

et en composantes

$$\begin{pmatrix} \Omega_1(t) \\ \Omega_2(t) \\ \Omega_3(t) \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} I_1 \Omega_1(t) \\ I_2 \Omega_2(t) \\ I_3 \Omega_3(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} I_1 \dot{\Omega}_1(t) \\ I_2 \dot{\Omega}_2(t) \\ I_3 \dot{\Omega}_3(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} M_1(t) \\ M_2(t) \\ M_3(t) \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} \dot{\Omega}_1(t) I_1 + \Omega_2(t) \Omega_3(t) (I_3 - I_2) = M_1(t) \\ \dot{\Omega}_2(t) I_2 + \Omega_1(t) \Omega_3(t) (I_1 - I_3) = M_2(t) \\ \dot{\Omega}_3(t) I_3 + \Omega_1(t) \Omega_2(t) (I_2 - I_1) = M_3(t) \end{cases}$$

Ces équations sont appelées les **équations d'Euler**.

11.1. Mouvement du corps solide libre.

Dans le cas d'un **corps solide libre**, c'est-à-dire soumis à aucun moment de force

$$\boxed{\vec{M}_{res ext CM}(t) = 0 \quad \forall t}$$

les équations d'Euler s'écrivent

$$\begin{aligned} \dot{\Omega}_1(t) I_1 + \Omega_2(t) \Omega_3(t) (I_3 - I_2) &= 0 \\ \dot{\Omega}_2(t) I_2 + \Omega_1(t) \Omega_3(t) (I_1 - I_3) &= 0 \\ \dot{\Omega}_3(t) I_3 + \Omega_1(t) \Omega_2(t) (I_2 - I_1) &= 0 \end{aligned}$$

La solution générale de ces équations est fort compliquée et a fait l'objet de nombreuses études approfondies. Mentionnons par exemple les applications aux systèmes de guidage des véhicules spatiaux.

Constatons qu'il est facile de trouver trois solutions particulières

- (1) $\Omega_1 = \text{cte}$ et $\Omega_2 = \Omega_3 = 0$
- (2) $\Omega_2 = \text{cte}$ et $\Omega_1 = \Omega_3 = 0$
- (3) $\Omega_3 = \text{cte}$ et $\Omega_1 = \Omega_2 = 0$

Ces solutions décrivent des rotations stationnaires autour des axes principaux.

Mentionnons la question de la stabilité des rotations autour des axes principaux. Par exemple, on peut supposer qu'au temps 0,

$$\begin{pmatrix} \Omega_1(0) \\ \Omega_2(0) \\ \Omega_3(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \Omega_{30} + \varepsilon_3 \end{pmatrix}$$

où ε_1 , ε_2 et ε_3 sont des petites perturbations par rapport à Ω_{30} :

$$|\varepsilon_1|, |\varepsilon_2|, |\varepsilon_3| \ll |\Omega_{30}|$$

et étudier le comportement asymptotique de $\Omega_1(t)$, $\Omega_2(t)$ et $\Omega_3(t)$, c'est-à-dire, calculer les limites

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \begin{pmatrix} \Omega_1(t) \\ \Omega_2(t) \\ \Omega_3(t) \end{pmatrix}$$

On dit que **la rotation autour de l'axe 3 est stable** (au sens de Lyapunov) si pour tout nombre $\varepsilon > 0$, il existe un nombre $\delta > 0$, tel que

$$\|\vec{\Omega}(0) - \vec{\Omega}_0\| < \delta \Rightarrow \|\vec{\Omega}(t) - \vec{\Omega}_0\| < \varepsilon \quad \forall t, \text{ où } \vec{\Omega}_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \Omega_{30} \end{pmatrix}$$

Il est possible de montrer que si

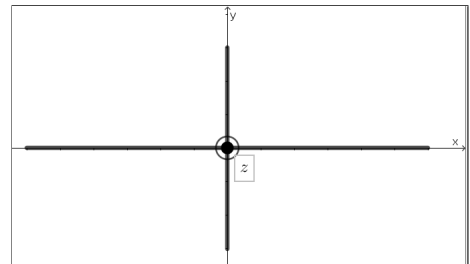
$$I_1 < I_2 < I_3$$

alors la rotation est stable autour des axes 1 et 3 et instable autour de l'axe 2.

11.2. Effet Djanibekov.

Considérons une croix constituée de deux tiges minces de longueurs $l < L$ et de masses m (voir ci-contre). Alors

$$I = \begin{pmatrix} \frac{1}{12}ml^2 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{12}mL^2 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{12}m(l^2 + L^2) \end{pmatrix}$$



et $I_{11} < I_{22} < I_{33}$

Pour étudier l'instabilité de l'axe 2, nous simulons le mouvement du corps solide libre avec la méthode d'Euler pour les conditions initiales

$$\vec{\Omega}(0) = \begin{pmatrix} 0.1 \\ 0.8 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ rad/s}$$

en exécutant le code *Ocatve* suivant:

```

1 clear
2 clf
3 #
4 I1=1;
5 I2=2;
6 I3=3;
7 #
8 Omega(:,1)=[0.1;0.8;0];
9 omega(:,1)=Omega/norm(Omega);
10 #
11 R(:, :, 1)=[1,0,0;0,1,0;0,0,1];
12 #
13 t0=0;
14 tf=60;
15 nmax=20000;
16 #
17 h=(tf-t0)/nmax;
18 t=t0:h:tf;
19 #
20 for n=1:nmax
21   Omega(1,n+1)=Omega(1,n)+h*(I2-I3)/I1*Omega(2,n)*Omega(3,n);
22   Omega(2,n+1)=Omega(2,n)+h*(I3-I1)/I2*Omega(1,n)*Omega(3,n);
23   Omega(3,n+1)=Omega(3,n)+h*(I1-I2)/I3*Omega(1,n)*Omega(2,n);
24   #
25   omega(:,n+1)=Omega(:,n+1)/norm(Omega(:,n+1));
26   theta=h*norm(Omega(:,n));
27   DR=cos(theta)*eye(3)+sin(theta)*[0,-omega(3,n),omega(2,n);omega(3,n),0,-omega(1,n);-omega(2,n),
      omega(1,n),0]+(1-cos(theta))*omega(:,n)*transpose(omega(:,n));
28   R(:, :, n+1)=R(:, :, n)*DR;
29 endfor

```

```

30 #
31 theta=0:pi/10:pi;
32 phi=0:2*pi/10:2*pi;
33 [tt,pp]=meshgrid(theta,phi);
34 xx=sin(tt).*cos(pp);
35 yy=sin(tt).*sin(pp);
36 zz=cos(tt);
37 #
38 hold("on")
39 subplot(2,1,1)
40 plot(t,Omega(1,:), "r;Omega_1;" ,"linewidth",2,t,Omega(2,:), "g;Omega_2;" ,"linewidth",2,t,Omega(3,:),
      ,"b;Omega_3;" ,"linewidth",2)
41 xlabel("t [s]")
42 ylabel("Omega [rad/s]")
43 grid("on")
44 title(sprintf("Mouvement du corps solide libre\n Référentiel lié au solide\n rouge=axe 1, vert=
      axe2, bleu=axe 3 (RGB)\n I1=%d, I2=%d, I3=%d kg.m^2",I1,I2,I3))
45 subplot(2,1,2)
46 hold("on")
47 mesh(xx,yy,zz,"facecolor","none")
48 plot3(omega(1,:),omega(2,:),omega(3,:), "k;Omega/||Omega||;" ,"linewidth",2)
49 view(30,10)
50 hold("off")
51 xlabel("Axe 1")
52 ylabel("Axe 2")
53 zlabel("Axe 3")
54 grid("on")
55 axis("equal",[-1 1 -1 1 -1 1])

```

ce qui donne le graphique de la figure 9.

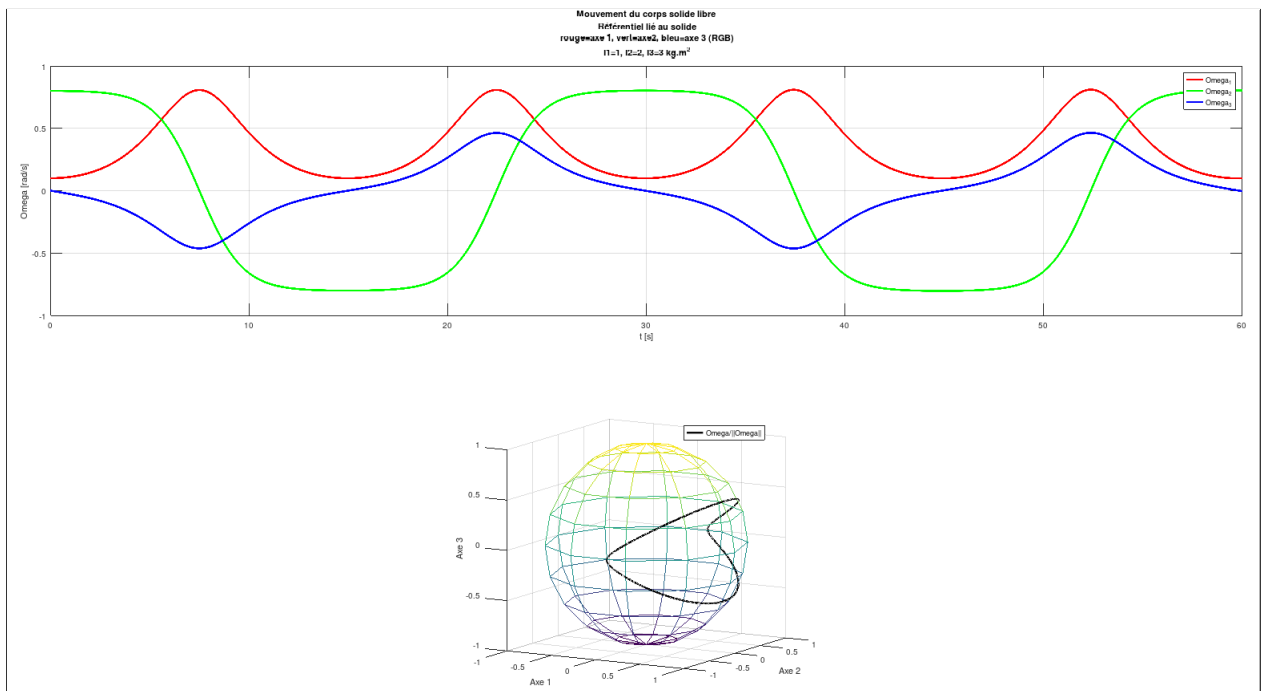


FIGURE 9. Instabilité de l'axe 2 du corps solide libre

Les deux codes *Octave* qui suivent produisent des animations: le premier permet de visualiser le mouvement de $\vec{\Omega}(t)/\|\Omega(t)\|$ dans le référentiel lié au solide et le deuxième permet de visualiser le mouvement du solide dans le référentiel du laboratoire.

(1) Dans le référentiel lié au solide:

```

1  clf
2  #
3  dt=0.2;
4  m=round((tf-t0)/dt);
5  k=floor(nmax/m);
6  #
7  for n=0:m
8      tr=t0+n/m*(tf-t0);
9      N=1+n*k;
10     #clf
11     hold("on")
12     mesh(xx,yy,zz,"facecolor","none")
13     plot3(omega(1,N),omega(2,N),omega(3,N),"*k;Omega/||Omega||;" ,"linewidth",2)
14     view(30,10)
15     hold("off")
16     xlabel("Axe 1")
17     ylabel("Axe 2")
18     zlabel("Axe 3")
19     grid("on")
20     axis("equal",[-1 1 -1 1 -1 1])
21     title(sprintf("Mouvement du corps solide libre\n Référentiel lié au solide\n I1=%d, I2=%d, I3=%d kg.m^2\n Temps t=%d",I1,I2,I3,tr))
22     pause(dt/3)
23 endfor

```

(2) Dans le référentiel du laboratoire:

```

1  clf
2  #
3  dt=0.2;
4  m=round((tf-t0)/dt);
5  k=floor(nmax/m);
6  z=[0;0;0];
7  #
8  for n=0:m
9      tr=t0+n/m*(tf-t0);
10     N=1+n*k;
11     plot3([0 R(1,1,N)], [0 R(2,1,N)], [0 R(3,1,N)], "r", "linewidth",2, [0 R(1,2,N)], [0 R(2,2,N)], [0 R(3,2,N)], "g", "linewidth",2, [0 R(1,3,N)], [0 R(2,3,N)], [0 R(3,3,N)], "b", "linewidth",2)
12     view(30,10)
13     xlabel("x")
14     ylabel("y")
15     zlabel("z")
16     grid("on")
17     axis("equal",[-3 3 -3 3 -3 3])
18     title(sprintf("Mouvement du corps solide libre\n Référentiel du laboratoire\n rouge=axe 1, vert=axe2, bleu=axe 3 (RGB)\n I1=%d, I2=%d, I3=%d kg.m^2\n Temps t=%d",I1,I2,I3,tr))
19     pause(dt/3)
20 endfor

```

Sur l'animation, on voit l'effet Djanibekov (voici un lien vers un film tourné à bord de l'ISS: <https://twitter.com/RevesdEspace/status/1696403375636582683>): le solide tourne autour de l'axe 2 et celui-ci se retourne régulièrement.

REMARQUE 11.1. Donnons quelques précisions concernant le code *Octave*:

- (1) Les lignes 21 à 23 contiennent la méthode d'Euler pour les équations d'Euler (encore lui !)

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{\Omega}_1(t) = \frac{I_2 - I_3}{I_1} \Omega_2(t) \Omega_3(t) \\ \dot{\Omega}_2(t) = \frac{I_3 - I_1}{I_2} \Omega_1(t) \Omega_3(t) \\ \dot{\Omega}_3(t) = \frac{I_1 - I_2}{I_3} \Omega_1(t) \Omega_2(t) \end{array} \right. \xrightarrow{\text{méthode d'Euler}} \left\{ \begin{array}{l} \Omega_1(t+h) = \Omega_1(t) + h \frac{I_2 - I_3}{I_1} \Omega_2(t) \Omega_3(t) \\ \Omega_2(t+h) = \Omega_2(t) + h \frac{I_3 - I_1}{I_2} \Omega_1(t) \Omega_3(t) \\ \Omega_3(t+h) = \Omega_3(t) + h \frac{I_1 - I_2}{I_3} \Omega_1(t) \Omega_2(t) \end{array} \right.$$

Rappelons que Ω_i sont les composantes du vecteur de vitesse angulaire relativement au système d'axes liés au solide.

- (2) La ligne 27 contient la matrice R_S de la rotation d'angle

$$\theta = h \cdot \|\vec{\Omega}(t)\| \text{ autour de l'axe } \vec{\omega}(t) := \frac{\vec{\Omega}(t)}{\|\vec{\Omega}(t)\|}$$

relativement au système d'axes liés au solide. En effet, soit $\vec{r}$ un vecteur. Alors

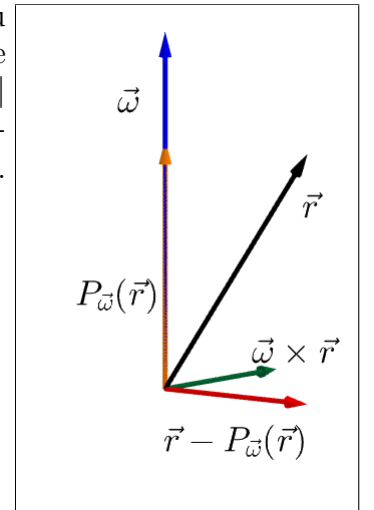
$$R\vec{r} = \underbrace{(\vec{\omega} \bullet \vec{r}) \cdot \vec{\omega}}_{=: \vec{a}} + \underbrace{(\vec{r} - (\vec{\omega} \bullet \vec{r}) \cdot \vec{\omega})}_{=: \vec{b}} \cdot \cos(\theta) + \underbrace{(\vec{\omega}(t) \times \vec{r})}_{=: \vec{c}} \cdot \sin(\theta)$$

Le vecteur $\vec{a}$ est la projection orthogonale de $\vec{r}$ sur $\vec{\omega}$. Par conséquent, le vecteur $\vec{b}$ est la projection orthogonale du vecteur $\vec{r}$ sur le plan orthogonal à $\vec{\omega}$. Remarquons encore que le vecteur $\vec{c}$ est orthogonal à $\vec{\omega}$ et $\vec{r}$. Sa norme vaut $\sin(\varphi)\|\vec{r}\|$ où φ désigne l'angle "entre" $\vec{\omega}$ et $\vec{r}$. C'est la norme de la projection orthogonale de $\vec{r}$ sur la plan orthogonal à $\vec{\omega}$: $\|\vec{b}\| = \|\vec{c}\|$. Remarquons encore que

$$\vec{\omega} \times \vec{r} = \begin{pmatrix} 0 & -\omega_3 & \omega_2 \\ \omega_3 & 0 & -\omega_1 \\ -\omega_2 & \omega_1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \\ r_3 \end{pmatrix}$$

et que

$$(\vec{\omega} \bullet \vec{r}) \cdot \vec{\omega} = \left(\begin{pmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \end{pmatrix} \cdot (\omega_1 \ \omega_2 \ \omega_3) \right) \begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \\ r_3 \end{pmatrix}$$



- (3) La ligne 28 contient la matrice qui donne la position du solide au pas $n+1$: la première colonne contient les composantes, relativement au référentiel du laboratoire, de l'axe 1 du solide, la deuxième colonne les composantes de l'axe 2 du solide et la troisième colonne les composantes de l'axe 3 du solide. Au temps 0, l'axe 1 du solide est confondu avec l'axe x du référentiel du laboratoire, l'axe 2 du solide est confondu avec l'axe y et l'axe 3 du solide est confondu avec l'axe z . Relativement au référentiel du laboratoire, la matrice de la rotation R_S est donnée par

$$R(n) \cdot R_S \cdot R(n)^{-1}$$

Par conséquent,

$$R(n+1) = R(n) \cdot R_S \cdot R(n)^{-1} \cdot R(n) = R(n) \cdot R_S$$

11.3. Mouvement d'un corps solide libre de révolution.

Nous étudions maintenant les équations d'Euler pour un solide libre dans le cas où le solide est invariant par rotation autour de l'axe z (c'est un corps de révolution). Dans ce cas, $I_1 = I_2$ et les équations d'Euler deviennent

$$\begin{aligned}\dot{\Omega}_1(t) + \beta \Omega_2(t) \Omega_3(t) &= 0 \\ \dot{\Omega}_2(t) - \beta \Omega_1(t) \Omega_3(t) &= 0 \quad \text{avec } \beta = \frac{I_3 - I_1}{I_1} \\ \dot{\Omega}_3(t) I_3 &= 0 \Rightarrow \Omega_3(t) = \text{cte}\end{aligned}$$

c'est-à-dire

$$\begin{aligned}\dot{\Omega}_1(t) + \omega \Omega_2(t) &= 0 \\ \dot{\Omega}_2(t) - \omega \Omega_1(t) &= 0 \quad \text{avec } \omega = \beta \Omega_3 = \frac{(I_3 - I_1) \Omega_3}{I_1}\end{aligned}$$

ou encore, en dérivant les deux premières équations par rapport à t ,

$$\begin{aligned}\ddot{\Omega}_1(t) + \omega^2 \Omega_1(t) &= 0 \\ \ddot{\Omega}_2(t) + \omega^2 \Omega_2(t) &= 0\end{aligned}$$

La solution générale est donnée par

$$\ddot{\Omega}(t) + \omega^2 \Omega(t) = 0 \Rightarrow \Omega(t) = a \cos(\omega t) + b \sin(\omega t) = A \sin(\omega t + \delta)$$

où, rappelons-le, A est appelé l'amplitude et δ le déphasage. Par conséquent,

$$\begin{aligned}\Omega_1(t) &= A_1 \sin(\omega t + \delta_1) \\ \Omega_2(t) &= A_2 \sin(\omega t + \delta_2)\end{aligned}$$

En substituant ces solutions dans le système d'équations du premier ordre, il vient

$$\begin{aligned}\dot{\Omega}_1(t) &= \omega A_1 \cos(\omega t + \delta_1) \\ \dot{\Omega}_2(t) &= \omega A_2 \cos(\omega t + \delta_2) \\ \Rightarrow \begin{cases} \omega A_1 \cos(\omega t + \delta_1) = -\omega A_2 \sin(\omega t + \delta_2), \forall t \\ \omega A_2 \cos(\omega t + \delta_2) = +\omega A_1 \sin(\omega t + \delta_1), \forall t \end{cases} &\Rightarrow A_1 = A_2 = A \text{ et } \delta_1 = \delta_2 + \frac{\pi}{2}\end{aligned}$$

En notant $\delta = \delta_2$, il vient

$$\begin{aligned}\Omega_1(t) &= A \cos(\omega t + \delta) \\ \Omega_2(t) &= A \sin(\omega t + \delta)\end{aligned}$$

Il suit que

$$\Omega_1(t)^2 + \Omega_2(t)^2 = A^2$$

est constant. Comme, par ailleurs, Ω_3 est constant, nous trouvons que la norme de $\omega_s(t)$ est constante

$$\|\omega_S(t)\| = \text{cte}$$

et que l'angle

$$\alpha = \arctan \left(\frac{\sqrt{\Omega_1(t)^2 + \Omega_2(t)^2}}{\Omega_3} \right) = \arctan \left(\frac{A}{\Omega_3} \right)$$

est constant au cours du mouvement.

Notons $R(t)$ la rotation qui au temps t donne l'orientation du solide libre: $\vec{s}_i(t) = R(t)\vec{s}_{i0}$ et

$$\vec{f}_1(t) = R(t)\vec{e}_1, \quad \vec{f}_2(t) = R(t)\vec{e}_2, \quad \vec{f}_3(t) = R(t)\vec{e}_3$$

où, rappelons-le, $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$ et $\vec{e}_3$ sont les vecteurs directeur des trois axes principaux du solide et $\vec{e}_3$ est le vecteur directeur de l'axe de révolution du solide (*i.e.* $I_1 = I_2$). Les vecteurs $\vec{f}_1(t)$, $\vec{f}_2(t)$ et $\vec{f}_3(t)$ peuvent être représentés par trois flèches perpendiculaires, de longueur 1, liées au solide et dont l'origine se trouve au centre de masse du solide. En d'autres termes, elles définissent un repère lié au solide.

Montrons que **les vecteurs $\vec{f}_3(t)$, $\vec{\omega}$ et $\vec{L}_{totCM}$ sont coplanaires**. Pour cela, il suffit de montrer que leur produit mixte est nul. Nous pouvons calculer le produit mixte à partir des composantes de ces vecteurs relativement à la base $\mathcal{F}_t = (\vec{f}_1(t), \vec{f}_2(t), \vec{f}_3(t))$. En effet, si le produit mixte est nul relativement à une base donnée, alors il est nul relativement à toute autre base. Par conséquent,

$$\begin{aligned} [\vec{f}_3(t), \vec{\omega}, \vec{L}_{totCM}]_{\mathcal{F}_t} &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \bullet \left(\begin{pmatrix} \Omega_1(t) \\ \Omega_2(t) \\ \Omega_3(t) \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} I_1\Omega_1(t) \\ I_1\Omega_2(t) \\ I_3\Omega_3(t) \end{pmatrix} \right) \\ &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} \Omega_2(t)I_3\Omega_3(t) - \Omega_3(t)I_1\Omega_2(t) \\ \Omega_3(t)I_1\Omega_1(t) - \Omega_1(t)I_3\Omega_3(t) \\ \Omega_1(t)I_1\Omega_2(t) - \Omega_2(t)I_1\Omega_1(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} \Omega_2(t)I_3\Omega_3(t) - \Omega_3(t)I_1\Omega_2(t) \\ \Omega_3(t)I_1\Omega_1(t) - \Omega_1(t)I_3\Omega_3(t) \\ 0 \end{pmatrix} = 0 \end{aligned}$$

Montrons maintenant que **l'angle γ entre les vecteurs $\vec{\omega}(t)$ et $\vec{L}_{totCM}$ est constant**. La base $\mathcal{F}_t$ étant orthonormée, nous pouvons calculer l'angle γ comme suit à partir des composantes des vecteurs $\vec{\omega}(t)$ et $\vec{L}_{totCM}(t)$ relativement à la base $\mathcal{F}_t$:

$$\begin{aligned} \cos(\gamma) &= \frac{\vec{\omega}_S(t) \bullet \vec{L}_{totCM}}{\|\vec{\omega}_S(t)\| \|\vec{L}_{totCM}\|} = \frac{\begin{pmatrix} \Omega_1(t) \\ \Omega_2(t) \\ \Omega_3(t) \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} I_1\Omega_1(t) \\ I_2\Omega_2(t) \\ I_3\Omega_3(t) \end{pmatrix}}{\|\vec{\omega}_S(0)\| \|\vec{L}_{totCM}\|} = \frac{I_1\Omega_1(t)^2 + I_2\Omega_2(t)^2 + I_3\Omega_3(t)^2}{\|\vec{\omega}_S(0)\| \|\vec{L}_{totCM}\|} \\ &= \frac{2E_{cinrot}}{\|\vec{\omega}_S(0)\| \|\vec{L}_{totCM}\|} \end{aligned}$$

Le corps étant supposé libre, son énergie cinétique est constante ainsi que son moment cinétique $\vec{L}_{totCM}$. Par ailleurs, nous avons vu que la norme de $\vec{\omega}(t)$ est constante. Par conséquent, le terme de droite de l'expression ci-dessus est constant.

En résumé, $\vec{L}_{totCM}$ est constant, $\vec{\omega}(t)$ tourne autour de $\vec{f}_3(t)$ dans un plan qui contient $\vec{L}_{totCM}$ et l'angle γ entre $\vec{L}_{totCM}$ et $\vec{\omega}(t)$ est constant. Par conséquent, $\vec{\omega}(t)$ tourne autour de $\vec{L}_{totCM}$ sur un cône d'ouverture γ . Par ailleurs, $\vec{\omega}(t)$ tourne autour de $\vec{f}_3(t)$ sur un cône d'ouverture α

constante. On a donc deux cônes qui roulent l'un dans l'autre et qui sont en contact le long de l'axe de rotation instantané (*i.e.* l'axe défini par $\omega(t)$, voir figure 10).

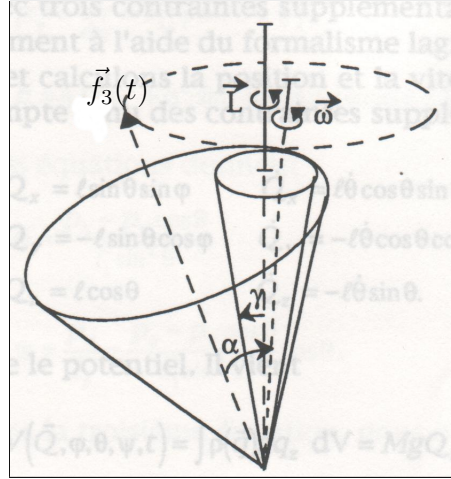


FIGURE 10. Mouvement du solide libre. (Dessin: UniGe)

12. Mouvement de la toupie

Considérons une toupie symétrique (un corps de révolution, voir figure 11) soumise à l'action de son propre poids, dont l'axe est fixé par un point sur le sol et tournant sans frottement.

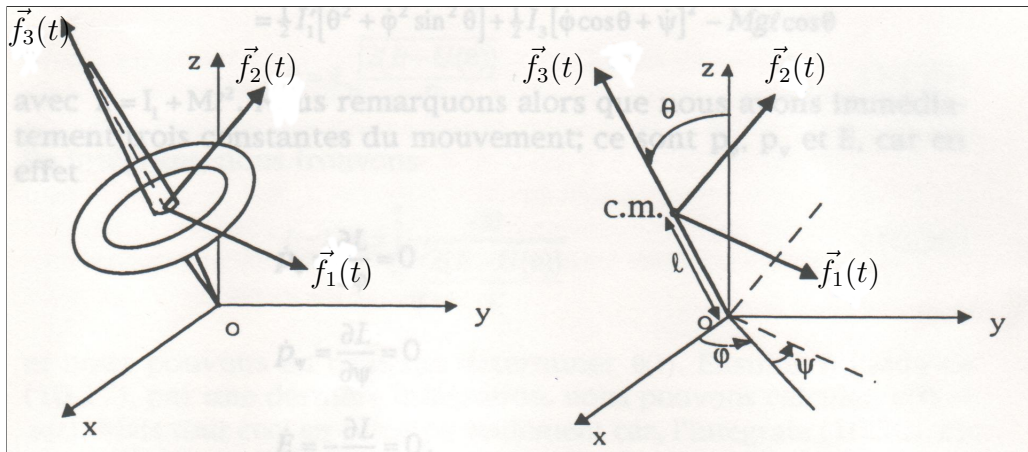


FIGURE 11. Mouvement de la toupie

Pour décrire le mouvement de la toupie, considérons le référentiel d'inertie R dont l'origine coïncide avec le point fixe de la toupie sur le sol. Notons l la distance séparant ce point du centre de masse de la toupie. Nous utilisons les angles d'Euler pour repérer la position du centre de masse.

Il vient (voir page 42)

$$\begin{aligned}
 \vec{r}_{CM} &= lR(t)\vec{e}_3 = lR_z(\varphi(t))R_x(\theta(t))\underbrace{R_z(\psi(t))\vec{e}_3}_{=\vec{e}_3} \\
 &= lR_z(\varphi(t)) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\theta(t)) & -\sin(\theta(t)) \\ 0 & \sin(\theta(t)) & \cos(\theta(t)) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \\
 &= l \begin{pmatrix} \cos(\varphi(t)) & -\sin(\varphi(t)) & 0 \\ \sin(\varphi(t)) & \cos(\varphi(t)) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ -\sin(\theta(t)) \\ \cos(\theta(t)) \end{pmatrix} = l \begin{pmatrix} \sin(\theta(t))\sin(\varphi(t)) \\ -\sin(\theta(t))\cos(\varphi(t)) \\ \cos(\theta(t)) \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

Par hypothèse, le tenseur d'inertie de la toupie, calculé par rapport au repère $(\vec{f}_1(t), \vec{f}_2(t), \vec{f}_3(t))$ lié au solide et dont l'origine coïncide avec le centre de masse de la toupie, est donné par

$$I = \begin{pmatrix} I_1 & 0 & 0 \\ 0 & I_1 & 0 \\ 0 & 0 & I_3 \end{pmatrix}$$

En vertu de la règle de Steiner, par rapport au point fixe de la toupie sur le sol,

$$\mathcal{I} = \begin{pmatrix} I_1 + ml^2 & 0 & 0 \\ 0 & I_1 + ml^2 & 0 \\ 0 & 0 & I_3 \end{pmatrix}$$

où m désigne la masse de la toupie.

Dans le référentiel d'inertie R dont l'origine coïncide avec le point fixe de la toupie sur le sol, le moment de la force de gravitation est donné par

$$\begin{aligned}
 \vec{M}_{grav} &= \sum_{i=1}^N m_i \vec{r}_i \times \vec{g} = \underbrace{\left(\sum_{i=1}^N m_i \vec{r}_i \right)}_{=m\vec{r}_{CM}} \times \vec{g} = m\vec{r}_{CM} \times \vec{g} = -mgl \begin{pmatrix} \sin(\theta(t))\sin(\varphi(t)) \\ -\sin(\theta(t))\cos(\varphi(t)) \\ \cos(\theta(t)) \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \\
 &= mgl \sin(\theta(t)) \begin{pmatrix} \cos(\varphi(t)) \\ \sin(\varphi(t)) \\ 0 \end{pmatrix} = mgl \sin(\theta(t)) R_z(\varphi(t)) \vec{e}_1
 \end{aligned}$$

car

$$R_z(\varphi(t))\vec{e}_1 = \begin{pmatrix} \cos(\varphi(t)) & -\sin(\varphi(t)) & 0 \\ \sin(\varphi(t)) & \cos(\varphi(t)) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\varphi(t)) \\ \sin(\varphi(t)) \\ 0 \end{pmatrix}$$

12.1. Constantes du mouvement.

Pour étudier le mouvement de la toupie, nous allons trouver **trois constantes du mouvement**, c'est-à-dire trois grandeurs qui ne changent pas au cours du mouvement de la toupie. Ces grandeurs conservées se trouvent facilement à l'aide du formalisme de Lagrange. Ce formalisme n'étant pas enseigné au Collège, nous allons procéder différemment.

L'énergie mécanique totale

$$E = \frac{1}{2}m\|\dot{\vec{r}}_{CM}\|^2 + \frac{1}{2}\vec{\omega}_S^\top(t)I\vec{\omega}_S(t) + mgz_{CM}(t)$$

est conservée. En effet, la seule force extérieure agissant sur les masses ponctuelles m_i constituant la toupie est la gravitation. Seule l'extrémité de la pointe de la toupie subit la force de réaction du sol en plus de la gravitation. Or cette extrémité ne bouge pas.

Comme

$$\begin{aligned}\dot{\vec{r}}_{CM}(t) &= l \begin{pmatrix} \dot{\theta}(t) \cos(\theta(t)) \sin(\varphi(t)) + \dot{\varphi}(t) \sin(\theta(t)) \cos(\varphi(t)) \\ -\dot{\theta}(t) \cos(\theta(t)) \cos(\varphi(t)) + \dot{\varphi}(t) \sin(\theta(t)) \sin(\varphi(t)) \\ -\dot{\theta}(t) \sin(\theta(t)) \end{pmatrix} \\ \Rightarrow \|\dot{\vec{r}}_{CM}\|^2 &= l^2 \left(\dot{\theta}(t)^2 + \dot{\varphi}(t)^2 \sin^2(\theta(t)) \right)\end{aligned}$$

l'énergie cinétique du centre de masse est donnée par

$$\frac{1}{2}m\|\dot{\vec{r}}_{CM}\|^2 = \frac{1}{2}ml^2 \left(\dot{\theta}(t)^2 + \dot{\varphi}(t)^2 \sin^2(\theta(t)) \right)$$

Par ailleurs, rappelons que pour les angles d'Euler (voir page 44),

$$\vec{\omega}_S(t) = \begin{pmatrix} \Omega_1(t) \\ \Omega_2(t) \\ \Omega_3(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dot{\varphi}(t) \sin(\psi(t)) \sin(\theta(t)) + \dot{\theta}(t) \cos(\psi(t)) \\ \dot{\varphi}(t) \cos(\psi(t)) \sin(\theta(t)) - \dot{\theta}(t) \sin(\psi(t)) \\ \dot{\varphi}(t) \cos(\theta(t)) + \dot{\psi}(t) \end{pmatrix}$$

Par conséquent,

$$\begin{aligned}\vec{\omega}_S^\top(t)I\vec{\omega}_S(t) &= \begin{pmatrix} \Omega_1(t) & \Omega_2(t) & \Omega_3(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_1 & 0 & 0 \\ 0 & I_1 & 0 \\ 0 & 0 & I_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Omega_1(t) \\ \Omega_2(t) \\ \Omega_3(t) \end{pmatrix} \\ &= I_1 (\Omega_1(t)^2 + \Omega_2(t)^2) + I_3 \Omega_3(t)^2\end{aligned}$$

Or, un calcul simple donne

$$\begin{aligned}\Omega_1(t)^2 + \Omega_2(t)^2 &= \dot{\varphi}(t)^2 \sin^2(\psi(t)) \sin^2(\theta(t)) + \dot{\theta}(t)^2 \cos^2(\psi(t)) \\ &\quad + 2\dot{\varphi}(t) \sin(\psi(t)) \sin(\theta(t)) \dot{\theta}(t) \cos(\psi(t)) \\ &\quad + \dot{\varphi}(t)^2 \cos^2(\psi(t)) \sin^2(\theta(t)) + \dot{\theta}(t)^2 \sin^2(\psi(t)) \\ &\quad - 2\dot{\varphi}(t) \cos(\psi(t)) \sin(\theta(t)) \dot{\theta}(t) \sin(\psi(t)) \\ &= \dot{\varphi}(t)^2 \sin^2(\theta(t)) + \dot{\theta}(t)^2\end{aligned}$$

Par conséquent,

$$\begin{aligned}\vec{\omega}_S^\top(t)I\vec{\omega}_S(t) &= I_1 (\Omega_1(t)^2 + \Omega_2(t)^2) + I_3 \Omega_3(t)^2 \\ &= I_1 \left(\dot{\varphi}(t)^2 \sin^2(\theta(t)) + \dot{\theta}(t)^2 \right) + I_3 \left(\dot{\varphi}(t) \cos(\theta(t)) + \dot{\psi}(t) \right)^2\end{aligned}$$

et, en notant

$$\mathcal{I}_1 = I_1 + ml^2$$

l'énergie mécanique totale est donnée par

$$E = \frac{1}{2}\mathcal{I}_1 \left(\dot{\theta}(t)^2 + \dot{\varphi}(t)^2 \sin(\theta(t))^2 \right) + \frac{1}{2}I_3 \left(\dot{\varphi}(t) \cos(\theta(t)) + \dot{\psi}(t) \right)^2 + mgl \cos(\theta(t)) = \text{cte}$$

C'est une constante du mouvement.

Rappelons que

$$\vec{L}_{tot\,CM}(t) = R(t)I\vec{\omega}_S(t) \text{ avec } R(t) = R_z(\varphi(t))R_x(\theta(t))R_z(\psi(t)) \text{ et } I\vec{\omega}_S(t) = \begin{pmatrix} I_1\Omega_1(t) \\ I_2\Omega_2(t) \\ I_3\Omega_3(t) \end{pmatrix}$$

Notons

$$\vec{b}(t) = \begin{pmatrix} b_1(t) \\ b_2(t) \\ b_3(t) \end{pmatrix} = R_x(\theta(t))R_z(\psi(t))I\vec{\omega}_S(t)$$

alors

$$\vec{L}_{tot\,CM}(t) = R_z(\varphi(t))\vec{b}(t)$$

et

$$\begin{aligned} \dot{\vec{L}}_{tot\,CM}(t) &= \dot{\varphi}(t)\vec{e}_3 \times R_z(\varphi(t))\vec{b}(t) + R_z(\varphi(t))\dot{\vec{b}}(t) \\ &= R_z(\varphi(t)) \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\varphi}(t) \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b_1(t) \\ b_2(t) \\ b_3(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \dot{b}_1(t) \\ \dot{b}_2(t) \\ \dot{b}_3(t) \end{pmatrix} \right) = R_z(\varphi(t)) \left(\dot{\varphi}(t) \begin{pmatrix} -b_2(t) \\ b_1(t) \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \dot{b}_1(t) \\ \dot{b}_2(t) \\ \dot{b}_3(t) \end{pmatrix} \right) \end{aligned}$$

Or, en vertu du théorème du moment cinétique,

$$\dot{\vec{L}}_{tot\,CM}(t) = \vec{M}_{grav} = mgl \sin(\theta(t))R_z(\varphi(t))\vec{e}_1$$

et en multipliant cette équation à gauche par $R_z(\varphi(t))^{-1}$ il suit que

$$\dot{\varphi}(t) \begin{pmatrix} -b_2(t) \\ b_1(t) \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \dot{b}_1(t) \\ \dot{b}_2(t) \\ \dot{b}_3(t) \end{pmatrix} = mgl \sin(\theta(t)) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

donc en particulier, il existe une constante P_φ telle que

$$\dot{b}_3(t) = 0 \Rightarrow b_3(t) = P_\varphi$$

Par un calcul simple, il vient

$$\begin{aligned}\vec{b}(t) &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\theta(t)) & -\sin(\theta(t)) \\ 0 & \sin(\theta(t)) & \cos(\theta(t)) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos(\psi(t)) & -\sin(\psi(t)) & 0 \\ \sin(\psi(t)) & \cos(\psi(t)) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathcal{I}_1 \Omega_1(t) \\ \mathcal{I}_1 \Omega_2(t) \\ I_3 \Omega_3(t) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\theta(t)) & -\sin(\theta(t)) \\ 0 & \sin(\theta(t)) & \cos(\theta(t)) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathcal{I}_1 (\cos(\psi(t)) \Omega_1(t) - \sin(\psi(t)) \Omega_2(t)) \\ \mathcal{I}_1 (\sin(\psi(t)) \Omega_1(t) + \cos(\psi(t)) \Omega_2(t)) \\ I_3 \Omega_3(t) \end{pmatrix}\end{aligned}$$

et donc

$$\begin{aligned}P_\varphi = b_3(t) &= \mathcal{I}_1 (\sin(\theta(t)) \sin(\psi(t)) \Omega_1(t) + \sin(\theta(t)) \cos(\psi(t)) \Omega_2(t)) + I_3 \cos(\theta(t)) \Omega_3(t) \\ &= \mathcal{I}_1 \left(\sin(\theta(t)) \sin(\psi(t)) \left(\dot{\varphi}(t) \sin(\psi(t)) \sin(\theta(t)) + \dot{\theta}(t) \cos(\psi(t)) \right) \right. \\ &\quad \left. + \sin(\theta(t)) \cos(\psi(t)) \left(\dot{\varphi}(t) \cos(\psi(t)) \sin(\theta(t)) - \dot{\theta}(t) \sin(\psi(t)) \right) \right) \\ &\quad + I_3 \cos(\theta(t)) \left(\dot{\varphi}(t) \cos(\theta(t)) + \dot{\psi}(t) \right) \\ &= \mathcal{I}_1 \left(\dot{\varphi}(t) \sin(\psi(t))^2 \sin(\theta(t))^2 + \sin(\theta(t)) \sin(\psi(t)) \dot{\theta}(t) \cos(\psi(t)) \right. \\ &\quad \left. + \dot{\varphi}(t) \cos(\psi(t))^2 \sin(\theta(t))^2 - \sin(\theta(t)) \cos(\psi(t)) \dot{\theta}(t) \sin(\psi(t)) \right) \\ &\quad + I_3 \cos(\theta(t)) \left(\dot{\varphi}(t) \cos(\theta(t)) + \dot{\psi}(t) \right) \\ &= \boxed{\mathcal{I}_1 \dot{\varphi}(t) \sin(\theta(t))^2 + I_3 \cos(\theta(t)) \left(\dot{\varphi}(t) \cos(\theta(t)) + \dot{\psi}(t) \right) = P_\varphi = \text{cte}}\end{aligned}$$

est une constante du mouvement. Rappelons que,

$$\mathcal{I}_1 = I_1 + ml^2$$

Finalement, comme dans le référentiel lié au solide, le moment de la force de gravitation est donné par

$$\begin{aligned}
 \vec{M}_{grav_S} &= R^{-1}(t) \vec{M}_{grav} = R_z(-\psi(t)) R_x(-\theta(t)) R_z(-\varphi(t)) (mgl \sin(\theta(t)) R_z(\varphi(t)) \vec{e}_1) \\
 &= mgl \sin(\theta(t)) R_z(-\psi(t)) R_x(-\theta(t)) \underbrace{R_z(-\varphi(t)) R_z(\varphi(t))}_{=\text{Id}} \vec{e}_1 \\
 &= mgl \sin(\theta(t)) R_z(-\psi(t)) \underbrace{R_x(-\theta(t)) \vec{e}_1}_{=\vec{e}_1} \\
 &= mgl \sin(\theta(t)) \begin{pmatrix} \cos(-\psi(t)) & -\sin(-\psi(t)) & 0 \\ \sin(-\psi(t)) & \cos(-\psi(t)) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = mgl \sin(\theta(t)) \begin{pmatrix} \cos(\psi(t)) \\ -\sin(\psi(t)) \\ 0 \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

et comme $\mathcal{I}_1 = \mathcal{I}_2$, en vertu des équations d'Euler,

$$\dot{\Omega}_3(t) = 0 \Rightarrow \boxed{P_\psi = I_3 \left(\dot{\varphi}(t) \cos(\theta(t)) + \dot{\psi}(t) \right) = \text{cte}}$$

est une constante du mouvement.

13. Energie mécanique du corps solide

13.1. Description du mouvement: solutions.

Remarquons que

$$P_\varphi = \mathcal{I}_1 \dot{\varphi}(t) \sin(\theta(t))^2 + P_\psi \cos(\theta(t))$$

Par conséquent,

$$P_\varphi - \cos(\theta(t)) P_\psi = \mathcal{I}_1 \dot{\varphi}(t) \sin(\theta(t))^2 \Rightarrow \dot{\varphi}(t) = \frac{P_\varphi - \cos(\theta(t)) P_\psi}{\mathcal{I}_1 \sin(\theta(t))^2}$$

et

$$\dot{\psi}(t) = \frac{P_\psi}{I_3} - \frac{P_\varphi - \cos(\theta(t)) P_\psi}{\mathcal{I}_1 \sin(\theta(t))^2} \cos(\theta(t))$$

De plus, l'énergie est donnée par

$$\boxed{E = \frac{1}{2} \mathcal{I}_1 \dot{\theta}(t)^2 + U(\theta(t))}$$

avec

$$U(\theta) = \frac{1}{2} \mathcal{I}_1 \dot{\varphi}(t)^2 \sin(\theta)^2 + \frac{1}{2} \frac{P_\psi^2}{I_3} + mgl \cos(\theta) = \frac{1}{2} \frac{(P_\varphi - \cos(\theta) P_\psi)^2}{\mathcal{I}_1 \sin(\theta)^2} + \frac{1}{2} \frac{P_\psi^2}{I_3} + mgl \cos(\theta)$$

Pour un P_φ et un P_ψ donnés, le graphe de $U(\theta)$ est représenté sur la figure 12.

Ainsi, au cours du temps, $\theta(t)$ oscille entre les deux valeurs limite θ_1 et θ_2 : c'est le mouvement de **nutaton**. Si l'état initial est tel que

$$E = E_m = U(\theta_m) = U(\theta(0))$$

alors pour tout $t > 0$,

$$U(\theta(t)) \geq U(\theta(0)) = U(\theta_m) = E_m = E = \frac{1}{2} \mathcal{I}_1 \dot{\theta}(t)^2 + U(\theta(t))$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} \mathcal{I}_1 \dot{\theta}(t)^2 + U(\theta(t)) \leq U(\theta(t)) \Rightarrow \dot{\theta}(t)^2 \leq 0 \Rightarrow \dot{\theta}(t) = 0 \Rightarrow \theta(t) = \text{cte}$$

C'est le mouvement de **précession pure** où l'axe de la toupie tourne uniformément autour de l'axe z

$$\dot{\varphi}(t) = \frac{P_\varphi - P_\psi \cos(\theta_m)}{\mathcal{I}_1 \sin(\theta_m)^2} = \text{cte}$$

et forme un angle constant avec l'axe z .

Pour trouver un état initial de précession pure, il faut trouver le minimum de $U(\theta)$:

$$U'(\theta) = \frac{1}{2\mathcal{I}_1} \frac{2(P_\varphi - \cos(\theta)P_\psi) \sin(\theta)^3 P_\psi - (P_\varphi - \cos(\theta)P_\psi)^2 2 \sin(\theta) \cos(\theta)}{\sin(\theta)^4} - mgl \sin(\theta)$$

En notant

$$x = P_\varphi - \cos(\theta_m)P_\psi$$

il vient

$$U'(\theta_m) = 0 \Rightarrow x^2 \cos(\theta_m) - xP_\psi \sin(\theta_m)^2 + \mathcal{I}_1 mgl \sin(\theta_m)^4 = 0$$

C'est une équation du second degré qui admet des solutions si

$$P_\psi^2 \sin(\theta_m)^4 - 4 \cos(\theta_m) \mathcal{I}_1 mgl \sin(\theta_m)^4 \geq 0 \Leftrightarrow P_\psi \geq 2\sqrt{\cos(\theta_m) \mathcal{I}_1 mgl} =: P_{\psi_{min}}$$

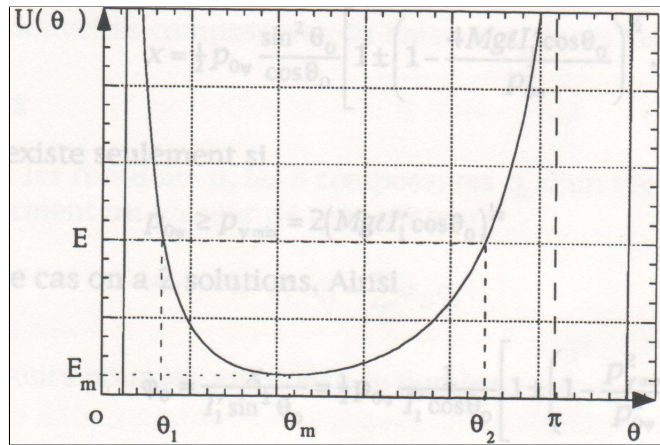


FIGURE 12. $U(\theta)$ pour un P_φ et un P_ψ donnés. (Graphique: UniGe)

Elles sont données par

$$\begin{aligned}
 x_{\pm} &= \frac{P_{\psi} \sin(\theta_m)^2 \pm \sqrt{P_{\psi}^2 \sin(\theta_m)^4 - 4 \cos(\theta_m) \mathcal{I}_1 mgl \sin(\theta_m)^4}}{2 \cos(\theta_m)} \\
 &= \frac{1}{2} P_{\psi} \frac{\sin(\theta_m)^2}{\cos(\theta_m)} \left(1 \pm \sqrt{1 - \frac{4 \cos(\theta_m) \mathcal{I}_1 mgl}{P_{\psi}^2}} \right) \\
 &= \frac{1}{2} P_{\psi} \frac{\sin(\theta_m)^2}{\cos(\theta_m)} \left(1 \pm \sqrt{1 - \frac{P_{\psi_{min}}^2}{P_{\psi}^2}} \right) \\
 &= \frac{1}{2} P_{\psi} \frac{\sin(\theta_m)^2}{\cos(\theta_m)} \left(1 \pm \left(1 - \frac{1}{2} \frac{P_{\psi_{min}}^2}{P_{\psi}^2} + \frac{1}{2 \cdot 4} \frac{P_{\psi_{min}}^4}{P_{\psi}^4} - \dots \right) \right)
 \end{aligned}$$

où dans la dernière ligne, nous avons utilisé le développement en série

$$\sqrt{1+x} = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{2 \cdot 4}x^2 + \dots \text{ si } |x| < 1$$

Par conséquent, si

$$P_{\psi} \gg P_{\psi_{min}} \Rightarrow x_+ \approx P_{\psi} \frac{\sin(\theta_m)^2}{\cos(\theta_m)} \text{ et } x_- \approx \frac{1}{4} \frac{P_{\psi_{min}}^2}{P_{\psi}} \frac{\sin(\theta_m)^2}{\cos(\theta_m)} = \frac{\mathcal{I}_1 mgl \sin(\theta_m)^2}{P_{\psi}}$$

En résumé, la toupie a un mouvement de précession pure avec un angle $\theta = \theta_m$ si

$$\dot{\varphi}(0) = \frac{x_{\pm}}{\mathcal{I}_1 \sin(\theta_m)^2} = \begin{cases} \frac{P_{\psi}}{\mathcal{I}_1 \cos(\theta_m)} & (\text{précession rapide}) \\ \frac{mgl}{P_{\psi}} & (\text{précession lente}) \end{cases}$$

C'est le mouvement de précession lente que l'on observe en général sur une toupie tournant rapidement autour de son axe.

REMARQUE 13.1. Remarquons que dans le cas de la précession lente,

$$P_{\psi} = I_3 \left(\dot{\varphi}(t) \cos(\theta(t)) + \dot{\psi}(t) \right) \approx I_3 \dot{\psi}(t) \approx I_3 \dot{\psi}(0)$$

et ainsi

$$\dot{\varphi}(0) \approx \frac{mgl}{I_3 \dot{\psi}(0)}$$

13.2. Description simplifiée du mouvement de précession pure.

Si la toupie tourne suffisamment vite autour de son axe et que cette vitesse est constante, on peut faire l'approximation

$$\vec{L}_{tot} \approx I_3 \dot{\psi}(0) \frac{1}{l} \vec{r}_{CM} = I_3 \dot{\psi}(0) \begin{pmatrix} \sin(\theta(t)) \sin(\varphi(t)) \\ -\sin(\theta(t)) \cos(\varphi(t)) \\ \cos(\theta(t)) \end{pmatrix}$$

Pour un mouvement de précession pure, $\dot{\theta}(t) = 0$ et

$$\begin{aligned}\dot{\vec{L}}_{tot} &\approx I_3 \dot{\psi}(0) \begin{pmatrix} \sin(\theta(0)) \cos(\varphi(t)) \dot{\varphi}(t) \\ \sin(\theta(0)) \sin(\varphi(t)) \dot{\varphi}(t) \\ 0 \end{pmatrix} = I_3 \dot{\psi}(0) \sin(\theta(0)) \dot{\varphi}(t) \begin{pmatrix} \cos(\varphi(t)) \\ \sin(\varphi(t)) \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= \vec{M}_{grav} = mgl \sin(\theta(0)) \begin{pmatrix} \cos(\varphi(t)) \\ \sin(\varphi(t)) \\ 0 \end{pmatrix}\end{aligned}$$

On en déduit que

$$\dot{\varphi}(t) \approx \frac{mgl}{I_3 \dot{\psi}(0)}$$