CHAPITRE 1

Théorèmes de Pythagore et Thalès ge-ncpt.1 [1 - B. Ischi 05-06]

1. Le théorème de Pythagore ge-ncpt.2

ge-ncpt.3 Commençons par un grand classique, le théorème de Pythagore (philosophe et mathématicien grec du ∼ VI e s. av. J.-C.).

THÉORÈME 1.1. ge-ncpt.4 *Dans un triangle rectangle de base a, de hauteur b et d'hypoténuse c, on a l'égalité*

$$a^2 + b^2 = c^2$$

DÉMONSTRATION. ge-ncpt.5 Le dessin de la figure 1 est obtenu en copiant quatre fois le triangle rectangle en alignant chaque fois la base d'un triangle avec la hauteur du prochain. Par conséquent, la somme des angles x, y et $90° - x$ vaut $x + y + 90° - x = 180°$. Ainsi, nous trouvons que $y = 90°$.

L'aire du grand carré est donnée par $(a + b)^2$, celle du petit carré par c^2 et celle du triangle rectangle par $\frac{ab}{2}$. En remarquant que l'aire du grand carré est égale à celle du petit carré plus quatre fois celle du triangle, nous trouvons

$$(a + b)^2 = c^2 + 4\frac{ab}{2} \quad \Rightarrow \quad a^2 + 2ab + b^2 = c^2 + 2ab \quad \Rightarrow \quad a^2 + b^2 = c^2\,.$$

□

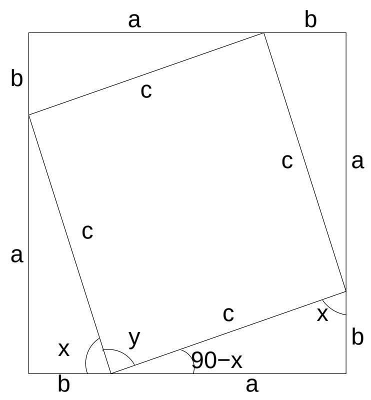


FIGURE 1. Démonstration du théorème de Pythagore

DÉMONSTRATION. (du théorème de Pythagore) ge-ncpt.6 [1 - B. Ischi 20-21] Donnons une deuxième preuve du théorème de Pythagore. Sur le dessin de la figure 2, les deux carrés ont la même aire et ils contiennent tous les deux 4 fois le triangle rectangle. Par conséquent, l'aire du carré de droite est égale à la somme des aires des carrés de gauche:

$$c^2 = a^2 + b^2$$

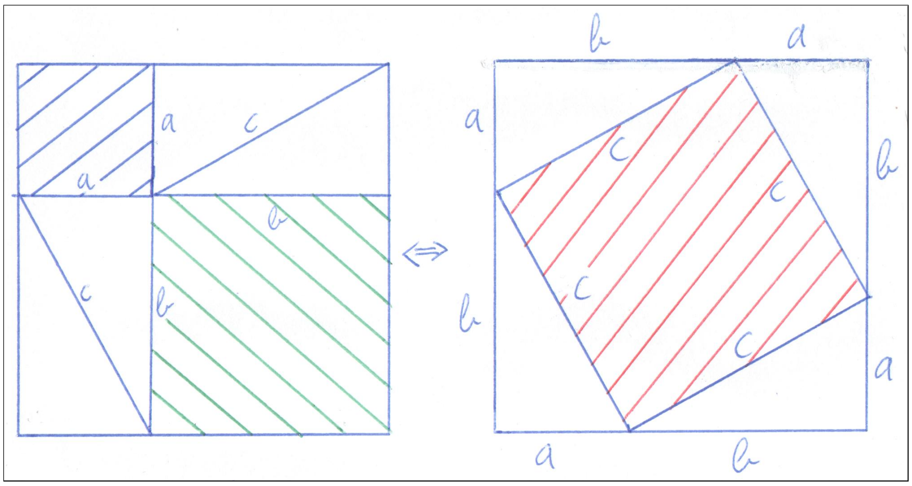


FIGURE 2. Deuxième preuve du théorème de Pythagore

□

DÉMONSTRATION. (du théorème de Pythagore)ge-ncpt.7 Donnons une troisième démonstration du théorème de Pythagore. Sur le dessin de la figure 3, on trouve que

$$c^2 = 4 \cdot \frac{a \cdot b}{2} + (b-a)^2 \;\Rightarrow\; c^2 = 2ab + b^2 - 2ab + a^2 = b^2 + a^2$$

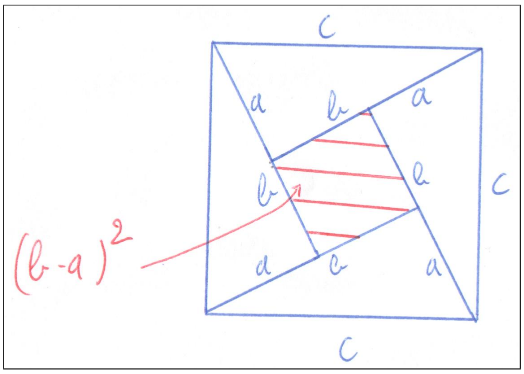


FIGURE 3. Troisième démonstration du théorème de Pythagore

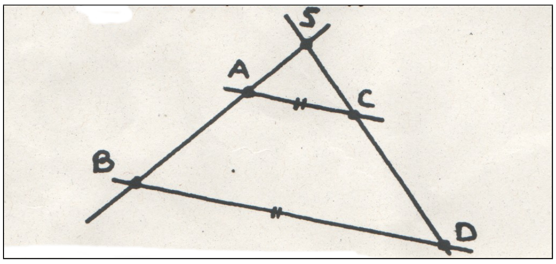
□

ge-ncpt.8 Il existe un grand nombre (à trois chiffres) de démonstrations du théorème de Pythagore !

2. Le théorème de Thalès ge-ncpt.9 [1 - B. Ischi 07-08]

ge-ncpt.10 [1 - B. Ischi 14-15] Nous allons maintenant énoncer et démontrer un théorème important dû à Thalès (de Milet, mathématicien, physicien, astronome, philosophe, 625-546 av. J.-C.).

THÉORÈME 2.2. *(de Thalès)*ge-ncpt.11 *Lorsque deux sécantes sont coupées par deux parallèles, comme sur la figure ci-dessous*

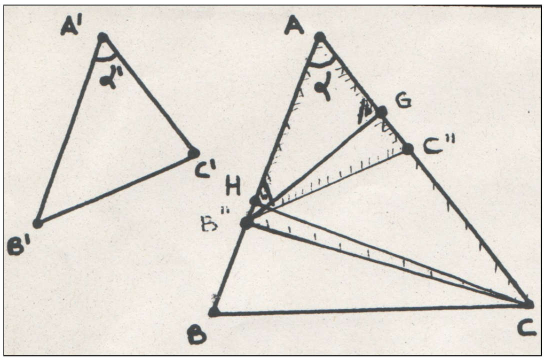


alors:

$$\frac{SB}{SA} = \frac{SD}{SC} = \frac{BD}{AC}$$

ge-ncpt.12 Pour démontrer le théorème de Thalès, nous devons commencer par démontrer un résultat préliminaire:

Lemme 2.3. ge-ncpt.13 *Lorsque deux triangles ont un angle égal, le rapport de leurs aires est égal au rapport des produits de leurs côtés adjacents:*



$$\alpha = \alpha' \Rightarrow \frac{\mathcal{S}(A,B,C)}{\mathcal{S}(A',B',C')} = \frac{AB \cdot AC}{A'B' \cdot A'C'}$$

où $\mathcal{S}(A,B,C)$ désigne l'air du triangle ABC.

Démonstration. (du lemme)ge-ncpt.14 Sur le dessin, les points B'' et C'' sont placés de telle sorte que $A'B' = AB''$ et $A'C' = AC''$. Par conséquent, les triangles $A'B'C'$ et $AB''C''$ sont égaux. De plus, HC est perpendiculaire à AB et GB'' est perpendiculaire à AC.

On a

$$\left.\begin{array}{l} \frac{\mathcal{S}(A,B,C)}{\mathcal{S}(A,B'',C)} = \frac{AB \cdot HC}{AB'' \cdot HC} = \frac{AB}{AB''} \\ \frac{\mathcal{S}(A,B'',C)}{\mathcal{S}(A,B'',C'')} = \frac{AC \cdot GB''}{AC'' \cdot GB''} = \frac{AC}{AC''} \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{\mathcal{S}(A,B,C)}{\mathcal{S}(A,B'',C'')} = \frac{\mathcal{S}(A,B,C)}{\mathcal{S}(A,B'',C)} \cdot \frac{\mathcal{S}(A,B'',C)}{\mathcal{S}(A,B'',C'')}$$

$$= \frac{AB}{AB''} \cdot \frac{AC}{AC''} \Rightarrow \frac{\mathcal{S}(A,B,C)}{\mathcal{S}(A',B',C')} = \frac{AB \cdot AC}{A'B' \cdot A'C'}$$

□

Démonstration. (du théorème de Thalès)ge-ncpt.15 On utilise le lemme:

$$\frac{\mathcal{S}(S,B,D)}{\mathcal{S}(S,A,C)} = \frac{\overbrace{SB \cdot SD}^{\text{sommet } S}}{SA \cdot SC} = \frac{\overbrace{BD \cdot SB}^{\text{sommet } B}}{AC \cdot SA} = \frac{\overbrace{SD \cdot BD}^{\text{sommet } D}}{SC \cdot AC} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} \frac{SD}{SC} = \frac{BD}{AC} \\ \frac{SB}{SA} = \frac{SD}{SC} \end{array}\right. \Rightarrow \frac{SB}{SA} = \frac{SD}{SC} = \frac{BD}{AC}$$

□

Corollaire 2.4. *(du théorème de Thalès)* ge-ncpt.16 *On a aussi,*

$$\frac{AB}{CD} = \frac{SB}{SD}$$

et donc également

$$\frac{SB}{AB} = \frac{SD}{CD}$$

Démonstration. ge-ncpt.17 En vertu du théorème de Thalès, on trouve

$$\frac{AB}{CD} = \frac{SB - SA}{SD - SC} = \frac{SB\left(1 - \frac{SA}{SB}\right)}{SD\left(1 - \frac{SC}{SD}\right)} = \frac{SB}{SD} \cdot \underbrace{\frac{1 - \frac{SA}{SB}}{1 - \frac{SC}{SD}}}_{=1} = \frac{SB}{SD}$$

□

Remarque 2.5. ge-ncpt.18 [1 - B. Ischi 20-21] Le corollaire découle directement du théorème de Thalès comme on peut le constater sur le dessin de la figure 4: les triangles SBD et ABD' sont semblables. De plus, $AD' = CD$. Par conséquent,

$$\frac{SB}{AB} = \frac{SD}{AD'} = \frac{SD}{CD}$$

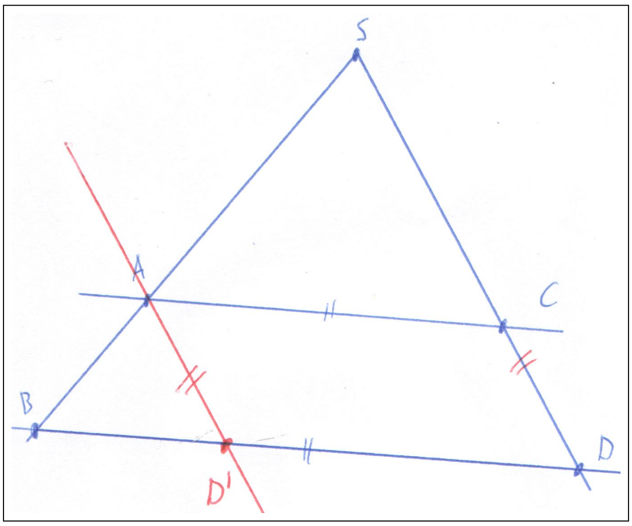


Figure 4. Démonstration du corollaire

Démonstration. (du théorème de Thalès) ge-ncpt.19 Donnons une deuxième démonstration du théorème de Thalès. Considérons le dessin de gauche sur la figure 5. Les triangles BCD et BAD ont la même base et la même hauteur. Par conséquent, ils ont la même aire. Il suit que les triangles BCS et DAS ont également la même aire. Notons H_2 la hauteur du triangle DAS et H_1 la hauteur du triangle BCS. Alors

$$\frac{SB \cdot H_1}{2} = \frac{SD \cdot H_2}{2} \Rightarrow \frac{SB}{SD} = \frac{H_2}{H_1}$$

Par ailleurs, l'aire du triangle SAC est donnée par $\frac{SA \cdot H_1}{2}$ ou par $\frac{SC \cdot H_2}{2}$. Il suit que

$$\frac{SA \cdot H_1}{2} = \frac{SC \cdot H_2}{2} \Rightarrow \frac{SA}{SC} = \frac{H_2}{H_1}$$

et donc

$$\frac{SB}{SD} = \frac{SA}{SC} \Rightarrow \frac{SB}{SA} = \frac{SD}{SC}$$

Finalement, sur le dessin de droite de la figure 5, on a translaté le triangle SAC en bas à gauche du triangle SBD, ce qui donne le triangle $S'BC'$. Par ce qui précède, on trouve que

$$\frac{BS}{BS'} = \frac{BD}{BC'} \Rightarrow \frac{SB}{SA} = \frac{BD}{AC}$$

ce qui achève la démonstration du théorème de Thalès.

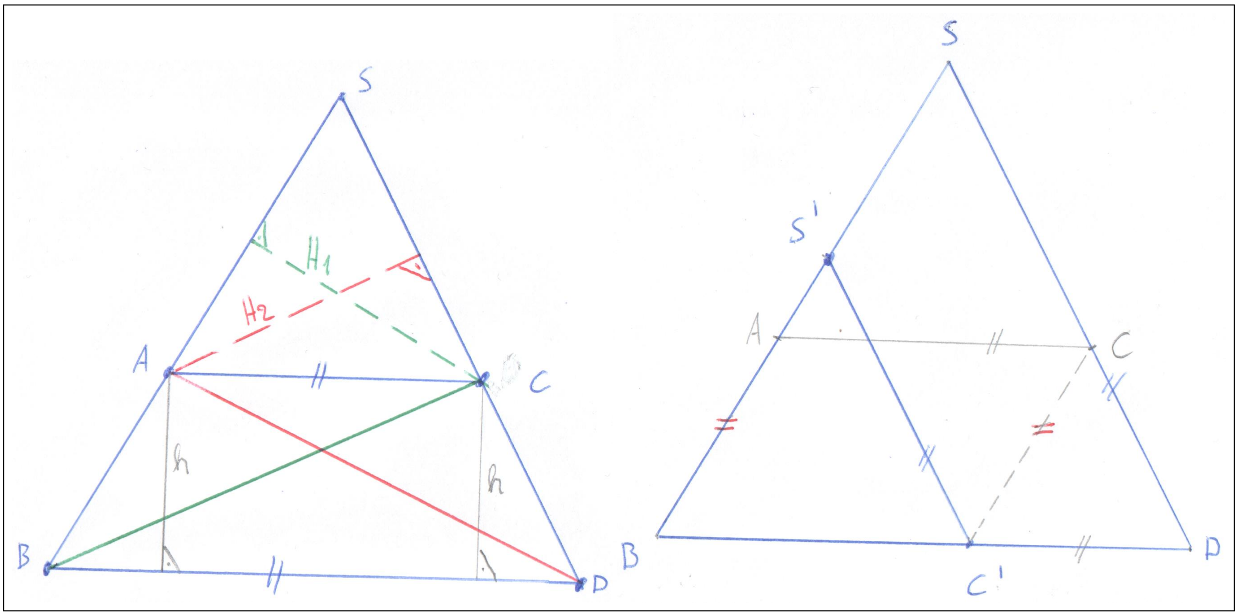


Figure 5. Deuxième démonstration du théorème de Thalès

□