Exercices de physique - Théorie - Forces conservatives - Corrigés

mec-tfc.1. Conservation de l'énergie pour une force conservative.

(1) Une force $\vec{F}(\vec{r})$ est conservative s'il existe une fonction $U : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ telle que

$$\vec{F}(\vec{r}) = -\mathrm{grad}(U)$$

où

$$\mathrm{grad}(U) = \begin{pmatrix} \partial_x U \\ \partial_y U \\ \partial_z U \end{pmatrix}$$

(2) Soit m une masse ponctuelle subissant une force résultante conservative (*i.e.* $\vec{F}_{res} = -\mathrm{grad}(U)$). On définit l'énergie mécanique de m par

$$E = \frac{1}{2} m \|\vec{v}\|^2 + U$$

Le premier terme est appelé l'énergie cinétique et le deuxième l'énergie potentielle.

(3) On a

Théorème 0.1. *Pour une masse m subissant une force conservative et éventuellement une force normale à sa vitesse en tout point de sa trajectoire, l'énergie mécanique est conservée: pour tous les temps $t_0 < t_1$, on a*

$$\frac{1}{2} m \|\vec{v}(t_0)\|^2 + U(\vec{r}(t_0)) = \frac{1}{2} m \|\vec{v}(t_1)\|^2 + U(\vec{r}(t_1))$$

Démonstration. Nous notons

$$\vec{F}_{res} = \vec{F} + \vec{F}_\perp = -\mathrm{grad}(U) + \vec{F}_\perp$$

où $\vec{F}$ est une force conservative et $\vec{F}_\perp$ est une force normale à la vitesse de m en tout point de sa trajectoire.

En dérivant par rapport au temps, on trouve

$$\begin{aligned}
\frac{d\,E_{mec}}{dt} &= \frac{1}{2} m \left(\frac{d}{dt}\left(v_x(t)^2\right) + \frac{d}{dt}\left(v_y(t)^2\right) + \frac{d}{dt}\left(v_z(t)^2\right) \right) + \frac{d}{dt} U(x(t), y(t), z(t)) \\
&= \frac{1}{2} m \left(2 v_x(t) \dot{v}_x(t) + 2 v_y(t) \dot{v}_y(t) + 2 v_z(t) \dot{v}_z(t)\right) \\
&\qquad + (\partial_x U) \cdot \dot{x}(t) + (\partial_y U) \cdot \dot{y}(t) + (\partial_z U) \cdot \dot{z}(t) \\
&= m \dot{\vec{v}}(t) \bullet \vec{v}(t) + \mathrm{grad}(U) \bullet \vec{v}(t) = m \vec{a} \bullet \vec{v} - \vec{F} \bullet \vec{v} = \vec{F}_{res} \bullet \vec{v} - \vec{F} \bullet \vec{v} \\
&= \left(\vec{F} + \vec{F}_\perp\right) \bullet \vec{v} - \vec{F} \bullet \vec{v} = \vec{F} \bullet \vec{v} + \underbrace{\vec{F}_\perp \bullet \vec{v}}_{=0} - \vec{F} \bullet \vec{v} = 0
\end{aligned}$$

ce qui montre que l'énergie mécanique est constante au cours du mouvement.

Donnons quelques précisions concernant la dérivée

$$\frac{d}{dt}U(x(t), y(t), z(t))$$

On a

$$x(t+dt) = x(t) + \dot{x}(t)dt,\ y(t+dt) = y(t) + \dot{y}(t)dt \text{ et } z(t+dt) = z(t) + \dot{z}(t)dt$$

Pour alléger les notations, nous écrivons simplement

$$x(t+dt) = x + \dot{x}dt,\ y(t+dt) = y + \dot{y}dt \text{ et } z(t+dt) = z + \dot{z}dt$$

Avec ces notations, il vient

$$U(x(t+dt), y(t+dt), z(t+dt)) = U(x + \dot{x}dt, y + \dot{y}dt, z + \dot{z}dt)$$

$$= U(x,y,z) + U(x+\dot{x}dt, y, z) - U(x,y,z) + U(x+\dot{x}dt, y+\dot{y}dt, z) - U(x+\dot{x}dt, y, z)$$

$$+U(x+\dot{x}dt, y(t)+\dot{y}dt, z(t)+\dot{z}dt) - U(x+\dot{x}dt, y+\dot{y}dt, z)$$

$$= U(x,y,z) + (\partial_x U)(x,y,z)\dot{x}dt + (\partial_y U)(x+\dot{x}dt, y, z)\dot{y}dt + (\partial_z U)(x+\dot{x}dt, y+\dot{y}dt, z)\dot{z}dt$$

De plus,

$$(\partial_y U)(x+\dot{x}dt, y, z)\dot{y}dt = ((\partial_y U)(x,y,z) + (\partial_x\partial_y U)(x,y,z)\dot{x}dt)\,\dot{y}dt$$

$$= (\partial_y U)(x,y,z)\dot{y}dt + (\partial_x\partial_y U)(x,y,z)\dot{x}\dot{y}(dt)^2 \approx (\partial_y U)(x,y,z)\dot{y}dt$$

en négligeant le terme en $(dt)^2$. Un argument similaire s'applique au dernier terme. Il suit que

$$\frac{U(x(t+dt), y(t+dt), z(t+dt)) - U(x(t), y(t), z(t))}{dt}$$

$$= (\partial_x U)(x,y,z)\dot{x} + (\partial_y U)(x,y,z)\dot{y} + (\partial_z U)(x,y,z)\dot{z} = \text{grad}(U(\vec{r}(t)) \bullet \dot{\vec{r}}(t)$$

□