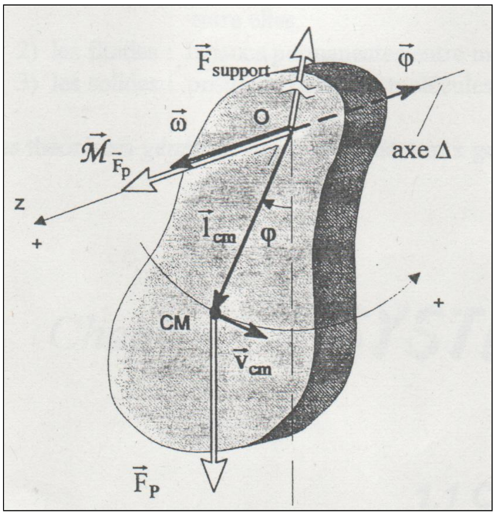
Exercices de physique - Théorie corps solide - Corrigés

mec-tcs.1. Période du pendule physique.



Les forces subies par le pendule physique sont la gravitation plus la force exercée par l'axe sur le pendule (sur le pallier). Relativement au référentiel lié à l'axe, le moment de la force exercée par l'axe est nul et seul le moment de la force de gravitation n'est pas nul. Il est donc commode d'écrire les équations du mouvement dans le référentiel lié à l'axe plutôt que de travailler dans le référentiel lié au centre de masse. En vertu du théorème du moment cinétique, nous trouvons que

$$\vec{M}_{res\,ext} = \dot{\vec{L}}_{tot} = I_\Delta \vec{\alpha}(t) = I_\Delta \alpha(t)\vec{e_3} = I_\Delta \ddot{\varphi}(t)\vec{e_3}$$

où $\vec{e_3}$ est le vecteur directeur de longueur 1 de l'axe z (voir dessin).
De plus, en vertu de la règle de Steiner,

$$I_\Delta = I_{\Delta'_{CM}} + ml_{CM}^2$$

Par ailleurs,

$$\vec{M}_{res\,ext} = \sum_{i=1}^{N} \vec{r_i} \times (m_i \vec{g}) = \underbrace{\left(\sum_{i=1}^{N} m_i \vec{r_i}\right)}_{=m\vec{l}_{CM}} \times \vec{g} = m\vec{l}_{CM} \times \vec{g} = -mgl_{CM}\sin(\varphi)\vec{e_3}$$

(**NB** Sur le dessin $\varphi < 0$). Par conséquent, l'équation du mouvement s'écrit

$$I_\Delta \ddot{\varphi}(t) = -mgl_{CM}\sin(\varphi(t))$$

et pour des petites oscillations

$$\sin(\varphi(t)) \approx \varphi(t)\ ,\ \forall\ t$$

il vient

$$I_\Delta \ddot{\varphi}(t) = -mgl_{CM}\varphi(t)$$

c'est-à-dire

$$\ddot{\varphi}(t) + \frac{mgl_{CM}}{I_\Delta}\varphi(t) = 0$$

ou encore

$$\ddot{\varphi}(t) + \omega^2\varphi(t) = 0 \text{ avec } \omega = \sqrt{\frac{mgl_{CM}}{I_\Delta}}$$

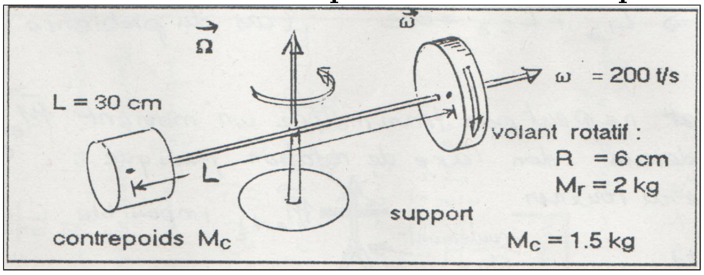
C'est l'équation d'un oscillateur harmonique dont la solution générale est donnée par

$$\varphi(t) = a\cos(\omega t + \delta)$$

La période est donnée par

$$\omega T = 2\pi \;\Rightarrow\; T = 2\pi \frac{1}{\omega} = 2\pi \sqrt{\frac{I_\Delta}{mgl_{CM}}} = 2\pi \sqrt{\frac{I_{\Delta'_{CM}} + ml_{CM}^2}{mgl_{CM}}}$$

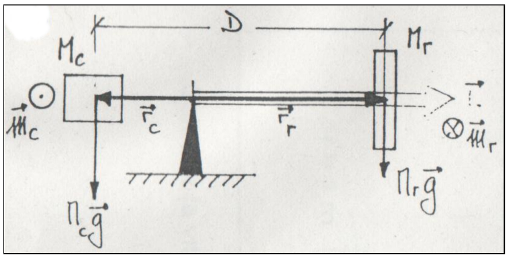
mec-tcs.2. Formule pour la vitesse de précession du gyroscope.



(Dessin: Collège de Candolle)

Un gyroscope est constitué d'une barre de masse négligeable, d'une masse M_r cylindrique de rayon R en rotation à vitesse ω et d'une masse contrepoids M_c. La distance entre les (centres de masse des) deux masses est notée L.

On peut modéliser le gyroscope par une tige mince de masse négligeable avec à une de ses extrémités un disque de rayon R et de masse M_r et à son autre extrémité une masse ponctuelle M_c, le tout tournant autour de la tige mince à vitesse angulaire ω.



(Dessin: Collège de Candolle)

Soit R le référentiel fixe dont l'axe des z coïncide avec l'axe vertical de rotation du gyroscope. Notons

$$\Omega(t) = \dot{\varphi}(t)$$

NB Si $\varphi(0) = 0$ et si le dessin représente le gyroscope au temps $t = 0$, alors l'axe des x est de même direction et de même sens que $\vec{r}_r$ et l'axe des y "rentre" dans le dessin (l'axe des z est vertical et confondu avec l'axe de rotation).

Commençons par calculer le moment de la force de gravitation.

$$\vec{M}(t) = M_r \vec{r}_r \times \vec{g} + M_c \vec{r}_c \times \vec{g} = g\left(M_r r_r - M_c r_c\right) \begin{pmatrix} \cos(\varphi(t)) \\ \sin(\varphi(t)) \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$= g\left(M_r r_r - M_c r_c\right) \begin{pmatrix} -\sin(\varphi(t)) \\ \cos(\varphi(t)) \\ 0 \end{pmatrix}$$

On peut supposer que $\Omega << \omega$ et par conséquent que $\vec{L}_{disque}$ est aligné avec l'axe de rotation du volant

$$\vec{L}_{disque}(t) = I_1 \omega \begin{pmatrix} \cos(\varphi(t)) \\ \sin(\varphi(t)) \\ 0 \end{pmatrix}$$

Par ailleurs

$$\vec{L}_{M_c} = I_2' \Omega(t) \vec{e}_3$$

où

$$I_2' = r_c^2 M_c$$

en assimilant le contre-poids à une masse ponctuelle. Il suit que

$$\dot{\vec{L}}_{tot}(t) = \begin{pmatrix} -I_1\omega\Omega(t)\sin(\varphi(t)) \\ I_1\omega\Omega(t)\cos(\varphi(t)) \\ I_2'\dot{\Omega}(t) \end{pmatrix}$$

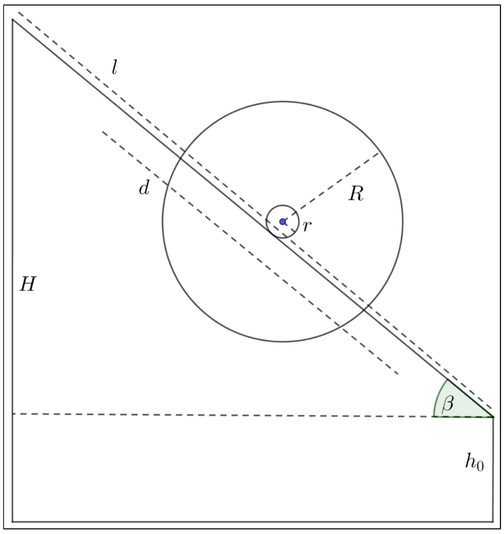
En vertu du théorème du moment cinétique

$$\vec{M}(t) = \dot{\vec{L}}(t) \;\Rightarrow\; g\,(M_r r_r - M_c r_c) = I_1\omega\Omega(t) \text{ et } I_2'\dot{\Omega}(t) = 0$$

Il suit que

$$\Omega(t) = \Omega_0 = \frac{g\,(M_r r_r - M_c r_c)}{I_1\omega} = \frac{g\,(M_r(L - r_c) - M_c r_c)}{I_1\omega}$$

mec-tcs.3. Roue de Maxwell.



Un cylindre de rayon R est traversé en son centre par une tige cylindrique de rayon r. Ce système est appelé roue de Maxwell. La roue de Maxwell roule sans glisser sur un double rail incliné (voir figure ci-contre). Avec une vitesse initiale nulle, elle met un temps t pour parcourir une distance d.
L'accélération du centre de masse de la roue de Maxwell est donnée par

$$\begin{cases} rF_{adh} = I\alpha \\ \sin(\beta)Mg - F_{adh} = Ma \\ a = \alpha \cdot r \end{cases}$$

c'est-à-dire

$$\sin(\beta)Mg - Ma = \frac{I}{r^2}a \;\Rightarrow\; a = \frac{\sin(\beta)g}{1 + \frac{I}{Mr^2}}$$

On trouve

$$d = \frac{1}{2}at^2 \;\Rightarrow\; a = \frac{2d}{t^2} \text{ et } \sin(\beta) = \frac{H - h_0}{l}$$

Par conséquent,

$$H - h_0 = \frac{2dl}{g}\left(1 + \frac{I}{Mr^2}\right)\frac{1}{t^2}$$

c'est-à-dire

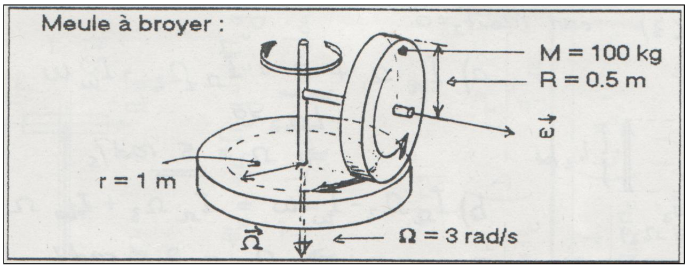
$$H - H_0 = p \cdot \frac{1}{t^2} \text{ où } p = \frac{2dl}{g}\left(1 + \frac{I}{Mr^2}\right)$$

Finalement, on trouve

$$\frac{I}{MR^2} = \frac{r^2}{R^2}\left(\frac{pg}{2dl} - 1\right)$$

mec-tcs.4. La meule à broyer.

Dans son mouvement de rotation de vitesse Ω constante autour de l'axe central, la masse cylindrique M exerce une force d'écrasement supérieure à celle de son propre poids. C'est l'effet gyroscopique dû au changement de $\vec{\omega}$.



(Dessin: Collège de Candolle)

Considérons le référentiel lié à l'axe de rotation de la meule: sur le dessin, l'axe z est vertical et monte, au temps $t = 0$ l'axe x est confondu avec l'axe de rotation du disque et a le même sens que $\vec{\omega}$ et l'axe y est perpendiculaire aux deux autres axes et son sens est donné par la règle de la main droite (x le pouce, y les autres doigts et z sort de la paume de la main droite).

Comme le cylindre roule, on a

$$\omega R = -\Omega r \;\Rightarrow\; \omega = -\frac{r}{R}\Omega$$

Notons (on suppose que $\varphi(0) = 0$)

$$\dot{\varphi}(t) = \Omega$$

Alors

$$\vec{L} = \begin{pmatrix} I_1\omega\cos(\varphi(t)) \\ I_1\omega\sin(\varphi(t)) \\ I_2\Omega \end{pmatrix}$$

avec

$$I_1 = \frac{1}{2}MR^2 \text{ et } I_2 = Mr^2 + M\left(\frac{R^2}{4} + \frac{e^2}{12}\right)$$

où e désigne l'épaisseur du disque.

Il suit que

$$\vec{M}_{ext} = \dot{\vec{L}}(t) = \begin{pmatrix} -I_1\omega\Omega\sin(\varphi(t)) \\ I_1\omega\Omega\cos(\varphi(t)) \\ 0 \end{pmatrix} = r\begin{pmatrix} \cos(\varphi(t)) \\ \sin(\varphi(t)) \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \end{pmatrix} = r\begin{pmatrix} F_3\sin(\varphi(t)) \\ -F_3\cos(\varphi(t)) \\ \cos(\varphi(t))F_2 - \sin(\varphi(t))F_1 \end{pmatrix}$$

où

$$\vec{F} = \begin{pmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -Mg \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} R_1 \\ R_2 \\ F_{sol} \end{pmatrix} \;\Rightarrow\; F_3 = -Mg + F_{sol} \;\Rightarrow\; F_{sol} = F_3 + Mg$$

On trouve que

$$F_{sol} = F_3 + Mg = -\frac{I_1\omega\Omega}{r} + Mg = \frac{1}{2}MR^2\frac{r}{Rr}\Omega^2 + Mg = \frac{1}{2}MR\Omega^2 + Mg$$

soit plus que le poids du disque. Remarquons que ce supplément est indépendant de r.